

# Respostas da Lista 2

MAT 038 (GAAL)

11/4/2016

## 1 Respostas da Lista de Exercícios 2

### 1.1 Matriz Inversa e Determinante

<http://bit.ly/mat038-ta2> e <http://bit.ly/mat038-tb2>

#### Exercício 1

(a)

$$A^{-1}A = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{21} - a_{12}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

```
A = matrix(QQ, [[4, 7], [1, 2]])
```

```
A
```

```
[4 7]
```

```
[1 2]
```

```
A.det()
```

```
1
```

Logo A é invertível.

```
A.inverse()
```

```
[ 2 -7]
```

```
[-1  4]
```

```
B = matrix(QQ, [[3, 4], [6, 8]])
```

```
B
```

```
[3 4]
```

```
[6 8]
```

```
B.det()
```

```
0
```

Logo B não é invertível.

```
C = matrix(QQ, [[4, -2], [2, 0]])
```

```
C
```

```
[ 4 -2]
```

```
[ 2  0]
```

```
C.det()
```

```
4
```

Logo C é invertível.

```
C.inverse()
```

```
[  0 1/2]
```

```
[-1/2  1]
```

### Exercício 2

#### (a)

```
A = matrix(QQ, [[2, 1], [5, 3]])
```

```
A
```

```
[2 1]
```

```
[5 3]
```

```
B = matrix(QQ, [[-1], [2]])
```

```
B
```

```
[-1]
```

```
[ 2]
```

```
A.det()
```

```
1
```

```
A.inverse()
```

```
[ 3 -1]
```

```
[-5  2]
```

```
X = A.inverse()*B
```

```
X
```

```
[-5]
```

```
[ 9]
```

#### (b)

```
A = matrix(QQ, [[1, -1], [2, 1]])
```

```
A  
[ 1 -1]  
[ 2  1]
```

```
A.det()  
3
```

```
A.inverse()  
[ 1/3  1/3]  
[-2/3  1/3]
```

```
X = A.inverse()*B  
X  
[1/3]  
[4/3]
```

### Exercício 3

Não. É possível resolver  $AX = B$  por esse método apenas se  $A$  for invertível. Se  $A$  não for invertível deve-se usar o método de escalonamento.

### Exercício 4

#### (b)

```
A = matrix(QQ, [[1, 2], [2, 6]])  
A  
[1 2]  
[2 6]
```

```
A.inverse()  
[ 3 -1]  
[-1 1/2]
```

```
B1 = matrix(QQ, [[3], [5]])  
B1  
[3]  
[5]
```

```
X = A.inverse()*B1  
X  
[ 4]  
[-1/2]
```

```
B2 = matrix(QQ, [[-1], [2]])  
B2  
[-1]  
[ 2]
```

```
X = A.inverse()*B2
```

```
X
```

```
[-5]
```

```
[ 2]
```

```
B3 = matrix(QQ, [[2], [0]])
```

```
B3
```

```
[2]
```

```
[0]
```

```
X = A.inverse()*B3
```

```
X
```

```
[ 6]
```

```
[-2]
```

**(b)**

```
AB1B2B3 = matrix(QQ, [[1, 2, 3, -1, 2], [2, 6, 5, 2, 0]])
```

```
AB1B2B3
```

```
[ 1  2  3 -1  2]
```

```
[ 2  6  5  2  0]
```

```
AB1B2B3.echelon_form()
```

```
[ 1  0  4 -5  6]
```

```
[ 0  1 -1/2  2 -2]
```

**Exercício 5**

**(a)**

$$XA^2 = A^{-1}$$

$$XA^2 A^{-2} = A^{-1} A^{-2}$$

$$XAAA^{-1}A^{-1} = A^{-3}$$

$$XAIA^{-1} = A^{-3}$$

$$XAA^{-1} = A^{-3}$$

$$XI = A^{-3}$$

$$X = A^{-3}$$

(b)

$$AXB = (BA)^2$$

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}(BA)^2 B^{-1}$$

$$IXI = A^{-1}(BA)^2 B^{-1}$$

$$X = A^{-1}(BA)^2 B^{-1}$$

(c)

$$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$$

$$((A^{-1}X)^{-1})^{-1} = (A(B^{-2}A)^{-1})^{-1}$$

$$A^{-1}X = ((B^{-2}A)^{-1})^{-1} A^{-1}$$

$$A^{-1}X = B^{-2}AA^{-1}$$

$$A^{-1}X = B^2$$

$$AA^{-1}X = AB^2$$

$$X = AB^2$$

(d)

$$ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$$

$$A^{-1}ABXA^{-1}B^{-1} = A^{-1}(I + A)$$

$$BXA^{-1}B^{-1} = A^{-1} + I$$

$$B^{-1}BXA^{-1}B^{-1} = B^{-1}(A^{-1} + I)$$

$$XA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} + B^{-1}$$

$$XA^{-1}B^{-1}B = (B^{-1}A^{-1} + B^{-1})B$$

$$XA^{-1} = B^{-1}A^{-1}B + I$$

$$AA^{-1}A = (B^{-1}A^{-1}B + I)A$$

$$X = B^{-1}A^{-1}BA + A$$

**Exercício 6**

Basta verificar que  $A^{-1}A = I$ . De fato

$$A^{-1}A = (2I - A)A = 2IA - A^2 = 2A - A^2 - I + I = -(A^2 - 2A + I) + I = -0 + I = 0 + I = I,$$

onde usamos que  $A^2 - 2A + I = 0$ .

**Exercícios 7**

```
AI = matrix(QQ, [[-2, 4, 1, 0], [3, -1, 0, 1]])
```

```
AI
```

```
[-2  4  1  0]
```

```
[ 3 -1  0  1]
```

```
AI.echelon_form()
```

```
[  1  0 1/10  2/5]
```

```
[  0  1 3/10  1/5]
```

```
BI = matrix(QQ, [[2, 3, 0, 1, 0, 0], [1, -2, 1, 0, 1, 0], [2, 0, -1, \
0, 0, 1]])
```

BI

```
[ 2 3 0 1 0 0]
[ 1 -2 1 0 1 0]
[ 2 0 -1 0 0 1]
```

BI.echelon\_form()

```
[ 1 0 0 2/13 3/13 3/13]
[ 0 1 0 3/13 -2/13 -2/13]
[ 0 0 1 4/13 6/13 -7/13]
```

CI = matrix(QQ, [[1, -2, 2, 1, 0, 0], [3, 1, 2, 0, 1, 0], [2, 3, -1, \
0, 0, 1]])

CI

```
[ 1 -2 2 1 0 0]
[ 3 1 2 0 1 0]
[ 2 3 -1 0 0 1]
```

CI.echelon\_form()

```
[ 1 0 0 1 -4/7 6/7]
[ 0 1 0 -1 5/7 -4/7]
[ 0 0 1 -1 1 -1]
```

DI = matrix(QQ, [[1, 1, 1, 1, 0, 0], [0, 2, 3, 0, 1, 0], [5, 5, 1, \
0, 0, 1]])

DI

```
[1 1 1 1 0 0]
[0 2 3 0 1 0]
[5 5 1 0 0 1]
```

DI.echelon\_form()

```
[ 1 0 0 13/8 -1/2 -1/8]
[ 0 1 0 -15/8 1/2 3/8]
[ 0 0 1 5/4 0 -1/4]
```

EI = matrix(QQ, [[0, -1, 1, 0, 1, 0, 0, 0], [2, 1, 0, 2, 0, 1, 0, \
0], [2, -1, 3, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 1, -1, 0, 0, 0, 1]])

EI

```
[ 0 -1 1 0 1 0 0 0]
[ 2 1 0 2 0 1 0 0]
[ 2 -1 3 0 0 0 1 0]
[ 0 1 1 -1 0 0 0 1]
```

EI.echelon\_form()

```
[ 1 0 0 0 -11/6 -1/3 5/6 -2/3]
[ 0 1 0 0 1/3 1/3 -1/3 2/3]
[ 0 0 1 0 4/3 1/3 -1/3 2/3]
[ 0 0 0 1 5/3 2/3 -2/3 1/3]
```



### Exercício 8

```
A = matrix(QQ, [[-1, 2], [2, 3]])
```

```
A
```

```
[-1 2]
```

```
[ 2 3]
```

```
A.det()
```

```
-7
```

Logo A é invertível.

```
B = matrix(QQ, [[-3, 2], [-3, 2]])
```

```
B
```

```
[-3 2]
```

```
[-3 2]
```

```
B.det()
```

```
0
```

Logo B não é invertível.

### Exercício 9

```
A = matrix(QQ, [[1, 2, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2]])
```

```
A
```

```
[1 2 3]
```

```
[2 3 1]
```

```
[3 1 2]
```

Usando expansão pela primeira linha:

```
1*(-1)^(1+1)*matrix([[3, 1], [1, 2]]).det() + 2*(-1)^(1+2)*matrix\
  ([[2, 1], [3, 2]]).det() + 3*(-1)^(1+3)*matrix([[2, 3], [3, 1]]).\
  det()
```

```
-18
```

```
A.det()
```

```
-18
```

```
B = matrix(QQ, [[1, 0, 3], [5, 1, 1], [0, 1, 2]])
```

```
B
```

```
[1 0 3]
```

```
[5 1 1]
```

```
[0 1 2]
```

Usando expansão pela primeira linha:

```
1*(-1)^(1+1)*matrix([[1, 1], [1, 2]]).det() + 3*(-1)^(1+3)*matrix\
([[5, 1], [0, 1]]).det()
```

16

```
B.det()
```

16

```
C = matrix(QQ, [[1, -1, -0, 3], [2, 5, 2, 6], [0, 1, 0, 0], [1, 4, \
2, 1]])
```

C

```
[ 1 -1  0  3]
```

```
[ 2  5  2  6]
```

```
[ 0  1  0  0]
```

```
[ 1  4  2  1]
```

Usando expansão pela terceira linha:

```
1*(-1)^(3+2)*matrix([[1, 0, 3], [2, 2, 6], [1, 2, 1]]).det()
```

4

```
C.det()
```

4

```
D = matrix(QQ, [[2, 0, 3, -1], [1, 0, 2, 2], [0, -1, 1, 4], [2, 0, \
1, 3]])
```

D

```
[ 2  0  3 -1]
```

```
[ 1  0  2  2]
```

```
[ 0 -1  1  4]
```

```
[ 2  0  1  3]
```

Usando expansão pela segunda coluna:

```
-1*(-1)^(3+2)*matrix([[2, 3, -1], [1, 2, 2], [2, 1, 3]]).det()
```

14

```
D.det()
```

14

### Exercício 10

Observamos que  $\det(A) = \frac{1}{2} \det(A_2)$  onde  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  é a matriz obtida multiplicando a terceira linha de  $A$  por  $1/2$ . Como  $A_2$  possui duas linhas iguais, temos que  $\det(A_2) = 0$ . Logo  $\det(A) = 0$ .

Como  $B$  é triangular, temos que  $\det(B) = 3 \cdot (-2) \cdot 4 = -24$ .

Expandindo sempre pela primeira linha observa-se que  $\det(C)$  é dado pelo produto das entradas da diagonal invertida, ou seja,  $\det(C) = 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$ .

Trocando linhas da matriz obtemos que  $\det(D) = (-1) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$   
 $(-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = -24$ .

Expandindo sempre pela primeira linha observa-se que  $\det(E)$  é dado pelo produto das entradas da diagonal invertida, ou seja,  $\det(E) = a \cdot c \cdot d \cdot g = acdg$ .

### Exercício 11

Fornecemos apenas as respostas de  $\det(B)$  e  $\det(D)$ :

Fazendo as operações sobre linhas  $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$  e  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  obtemos

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Logo  $\det(B_2) = 1 \cdot 1 \cdot 16 = 16$ . Portanto  $\det(B) = \det(B_1) = \det(B_2) = 16$ .

Fazendo as operações sobre linhas  $L_1 \leftarrow (1/2)L_1$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ,  $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ ,  $L_2 \leftrightarrow L_3$  e  $L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3$  obtemos

$$D_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Logo  $\det(D_5) = 1 \cdot (-1) \cdot (1/2) \cdot 14 = -7$ . Portanto  $\det(D) = 2 \det(D_1) = 2 \det(D_2) = 2 \det(D_3) = -2 \det(D_4) = -2 \det(D_5) = -2 \cdot (-7) = 14$ .

### Exercício 12

Calculando a expansão de cofatores pela primeira coluna obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= k[\text{cof}(A)]_{11} + k[\text{cof}(A)]_{31} \\ &= k(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ -8 & k-1 \end{vmatrix} + k(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -k & 3 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= k(k^2 - 1 + 8 - k - 3k - 3) \\ &= k(k^2 - 4k + 4) \\ &= k(k-2)^2. \end{aligned}$$

Logo  $\det(A) \neq 0$  se  $k \neq 0$  e  $k \neq 2$ . Portanto  $A$  é invertível se  $k \neq 0$  e  $k \neq 2$ .

**Exercício 13**

(a) -6    (b) 9    (c)  $-3/2$     (d)  $3 \cdot 2^n$     (e)  $-2 \cdot 3^n$     (f) 9.

**Exercício 14**

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1}) \det(AB) = \frac{1}{\det(B)} \det(A) \det(B) = \det(A).$$