Lista de Exercícios 2
Matriz inversa e determinante

MAT 038 (GAAL) - Turma TB2

1. O objetivo deste exercício é aplicar o seguinte teorema: Suponha que A é uma matriz 2×2: $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$. Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, então A é invertível. Nesse caso

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, então A não é invertível.

(a) Verifique explicitamente que $A^{-1}A = I_2$.

(b) Determine quais das seguintes matrizes são invertíveis, e calcule a inversa quando ela existir:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Resolva os seguintes sistemas usando o método da matriz inversa:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

3. É possível resolver qualquer sistema de duas equações lineares com duas incógnitas usando o método da matriz inversa?

4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^{-1} e use-a para resolver os sistemas $AX = B_1$, $AX = B_2$ e $AX = B_3$.

(b) Resolva esses três sistemas simultaneamente escalonando a matriz

$$[A \,|\, B_1\, B_2\, B_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

até reduzi-la à forma escalonada reduzida.

Se você contar o número de multiplicações que você efetuou em (a) e em (b), você vai descobrir que o método em (b) requer menos operações para obter a solução do sistema. Para sistemas maiores, essa diferença é ainda mais acentuada. É por isso que programas de computador não usam o método de (a) para resolver sistemas lineares.

5. Se A é uma matriz quadrada, é comum usar as notações $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, etc. Se A é uma matriz quadrada e invertível, é comum usar as notações $A^{-0} = I$, $A^{-2} = (A^{-1})^2$, $A^{-3} = (A^{-1})^3$, etc. Resolva para X as seguintes equações matriciais (simplifique a resposta tanto quando possível). Suponha que todas as matrizes são invertíveis. (Lembre que o produto de matrizes não é comutativo.)

(a) $XA^2 = A^{-1}$

(b) $AXB = (BA)^2$

(c) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$

(d) $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

6. Seja A uma matriz quadrada. Suponha que A satisfaz a equação $A^2 - 2A + I = 0$. Mostre que $A^{-1} = 2I - A$.

7. Usando o método de escalonamento, determine quais das seguintes matrizes são invertíveis, e calcule a inversa quando ela existir:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Calcule o determinante das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quais dessas matrizes são invertíveis?

9. Calcule o determinante das seguintes matrizes usando expansão de cofatores por qualquer linha ou coluna que pareça conveniente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Use as propriedades de determinantes para calcular o determinante das seguintes matrizes por inspeção direta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & c & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{bmatrix}.$$

11. Calcule os determinantes das matrizes no Exercício 9 usando escalonamento para reduzi-las à forma triangular.

12. Para quais valores de k a matriz

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$$

é invertível?

13. Sejam A e B matrizes $n \times n$ tais que $\det(A) = 3$ e $\det(B) = -2$. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\det(AB)$

(b) $\det(A^2)$

(c) $\det(B^{-1}A)$

(d) $\det(2A)$

(e) $\det(3B^T)$

(f) $\det(AA^T)$

14. Se B é invertível, prove que $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.