Lista de Exercícios
Equações Diferenciais Ordinárias I
MAT 871

1 de abril de 2017

Esta lista contém exercícios de [1], [2], [3] e [4]. Os exercícios estão separados por aulas em ordem decrescente de aula.

Aula 29

1. Calcule os autovalores e autovetores do operador

$$L = -\frac{d}{dx}$$

com domínio $D(L) = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{C}) \mid f'(0) = 0 \text{ e } f'(1) = 0\}$.

Aula 28

1. Usando o método descrito na Seção 5.1 do livro do Teschl, resolva a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,t)$$

com as condições de contorno $u(t,0) = u_0$ e $u(t,1) = u_1$ e condição inicial $u(0,x) = u(x)$. Nesse modelo idealizado, a solução descreve a temperatura de uma barra fina cujas extremidades são mantidas às temperaturas fixas u_0 e u_1, respectivamente. O que você pode dizer sobre $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$? (Sugestão: Se $u(t,x)$ é solução da equação, então também é solução a função $u(t,x) + a + bx$. Use isso para reduzir as condições de contorno ao caso $u_0 = 0$ e $u_1 = 0$.

Aula 27

1. Considere a equação $\dot{x} = -x^3$ para $x \in \mathbb{R}$. Estude a estabilidade da solução de equilíbrio $\varphi(t) \equiv 0$ usando o método da linearização.

Estude a estabilidade da solução de equilíbrio $\varphi(t) \equiv 0$ usando a função $V(x) = x^2$ e o método de Lyapunov.

2. Considere o oscilador harmônico $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ onde $\omega > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Essa equação diferencial é equivalente ao sistema

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Considere a função em $\mathbb{R}^2$ definida por $E(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\omega^2}{2}y^2$. Use essa função e o método de Lyapunov para estudar a estabilidade da solução de equilíbrio $\varphi(t) \equiv 0$.

3. Estude a estabilidade dos pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas:

(a) $\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 \\ \dot{y} &= -x - y^3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} \dot{x} &= y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \alpha y(x^2 + y^2) \end{aligned}$

Aula 25

1. Prove que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema $\dot{x} = Ax + g(x)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^2 + uv + v^2 + wv^2 \\ w^2 + uvw \\ w^3 \end{bmatrix}$$

Aula 24

1. Converta cada uma das seguintes equações escalares em um sistema e esboce o espaço de fase correspondente. Decida se a origem é estável, assintoticamente estável, ou instável.

(a) $\ddot{x} + x = 0$. (b) $\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 0$. (c) $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$. (d) $\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0$. (e) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$. (f) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$. (g) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$. (h) $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$.

2. Para ilustrar o que ocorre no caso em que a origem não é o único ponto de equilíbrio de um sistema linear, considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= 2x - 2y. \end{aligned}$$

(a) Mostre que existe uma linha de pontos de equilíbrio. (b) Esboce o espaço de fases.

Aula 23

1. Determine E^s, E^u, C, K, λ e μ (relativos a norma Euclidiana) como no corolário que vimos em aula para a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Aula 22

1. Discuta a existência de variedades estáveis, instáveis, e central para os sistemas lineares com as seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Aula 20

1. Para cada matriz A a seguir, determine a forma canônica de Jordan J para A, encontre uma matriz B invertível tal que $B^{-1}AB = J$, e calcule $\exp(tA)$.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Prove que $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$ para toda matrix A $n \times n$. (Dica: Use a fórmula de Liouville.)

Aula 19

1. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

com as condições iniciais $x(0) = a$ e $y(0) = b$. Mostre que

$$A^{2n} = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}, \qquad A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

e consequentemente

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} \sum_n t^{2n}(-1)^n/(2n)! & \sum_n t^{2n+1}(-1)^n/(2n+1)! \\ \sum_n t^{2n+1}(-1)^{n+1} & \sum_n t^{2n}(-1)^n/(2n)! \end{bmatrix},$$

a partir da qual reconhecemos que

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Portanto $x(t) = a\cos t + b\sin t$ e $y(t) = -a\sin t + b\cos t$.

2. Sejam
$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Mostre que φ_1 e φ_2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.
   (b) Observe que $\det([\varphi_1\ \varphi_2]) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso contradiz o Item (a)? Por que?

Aulas 17-18

1. Considere os seguintes sistemas:
   (a) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x.$
   (b) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x.$
   (c) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x.$
   (d) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} x.$

   Faça o seguinte:
   (i) Determine a matriz principal em $t = 0$ para os sistemas (a)-(d).
   (ii) Resolva o problema de valor inicial para o sistema (b) com a condição inicial $x(0) = (1, 0)$.
   (iii) Calcule a matriz de mudança de coordenadas que diagonaliza a matriz de coeficientes do sistema (d).
   (iv) Determine a matriz principal em $t = 3$ para o sistema (c).

Aula 16

1. Determine a matriz fundamental do sistema
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1/t \\ 1+t & -1 \end{bmatrix}, \qquad t > 0.$$
   Dica: $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ é uma solução.

Aula 14

1. O que você pode dizer sobre a função contínua $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ se
$$f(x) \leq \int_0^x f(s)\, ds \text{ ?}$$

2. Use a desigualdade de Gronwall para provar a seguinte proposição: Se $t \mapsto \beta(t)$ e $t \mapsto \gamma(t)$ são soluções de $\dot{x} = f(x)$ em $[0, T]$, onde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $T > 0$, então existe uma constante $L > 0$ tal que
$$|\beta(t) - \gamma(t)| \leq |\beta(0) - \gamma(0)| e^{Lt} \qquad \text{para } t \in [0, T].$$
Ou seja, a diferença entre duas soluções no instante t cresce no máximo exponencialmente. Além disso, se duas soluções têm o mesmo estado inicial, então elas coincidem. O resultado deste exercício fornece uma prova alternativa do teorema de unicidade para sistemas autônomos (o mesmo vale para sistemas não-autônomos).

Aula 12

1. Suponha que $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ e $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$. Mostre que
$$\dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) \qquad \text{e} \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$
Sugestões: (i) Observe que $x^2 + y^2 = r^2$ e derive com respeito a t. (ii) Multiplique $\dot{x}$ por $-\sin\theta$ e $\dot{y}$ por $\cos\theta$ e resolva para θ.

2. (a) Considere o oscilador harmônico $\dot{x} = -y$ e $\dot{y} = x$. Represente esse sistema em coordenadas polares r e θ. Resolva o sistema e conclua que todos os pontos do espaço de fases são estáveis.

   (b) Considere o sistema
   $$\dot{r} = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{\theta} = 1 + r.$$
   O que você pode dizer sobre o retrato de fases desse sistema sem resolvê-lo, mas apenas comparando-o com o sistema do Item (a)? Resolva o sistema. Compare o retrato de fases do sistema com o retrato do sistema do Item (a). Mostre que qualquer ponto (r_0, θ_0) com $r_0 > 0$ não é estável.

3. Determine as soluções de equilíbrio do sistema
$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
Para cada uma dessas soluções, decida se ela é estável, instável, ou assintoticamente instável.

Aula 11

1. Escreva $\ddot{u}+\alpha u = 0$, $u \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ como um sistema de primeira ordem.
   (a) Determine o fluxo do sistema e verifique que ele de fato satisfaz as propriedades de fluxo.
   (b) Descreva o diagrama de bifurcação do sistema.
   (c) Mostre que o sistema tem órbitas periódicas se $\alpha > 0$.
   (d) Mostre que todas as soluções so sistema são estáveis se $\alpha > 0$.

Aula 10

1. Considere o oscilador harmônico dado pela equação de segunda ordem $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ com $\omega > 0$. Um sistema de primeira ordem equivalente a essa equação é
$$\dot{u} = \omega v, \qquad \dot{v} = -\omega u.$$
Determine o retrato de fases desse sistema. Encontre explicitamente a solução que passa pelo ponto $(u, v) = (1, 1)$ em $t = 0$. Note que o sistema
$$\dot{u} = v, \qquad \dot{v} = -\omega^2 u$$
também é equivalente ao oscilador harmônico. O retrato de fase desse sistema é diferente do retrado de fase do sistema anterior? Você pode tornar precisa a noção de que dois retratos de fase são iguais?

2. (Sistema Predador-Presa) (a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema
$$\dot{x} = -x + xy, \qquad \dot{y} = ry(1 - y/k) - axy.$$
Esse é um modelo para a interação entre predadores e presas, onde x é a quantidade de predadores e y é a quantidade de presas. O parâmetro $r > 0$ representa a taxa de crescimento da quantidade de presas, o parâmetro $k > 0$ representa a capacidade do ambiente de sustentar as presas, e o parâmetro $a > 0$ é uma medida da frequência com que os predadores capturam as presas. Note que os predadores vão ser extintos se não houver presas. (b) O que acontece com a população de presas se não houver predadores?

3. Para $r > 0$ e $k > 0$ fixos, considere a família de equações diferenciais
$$\dot{x} = rx(1 - x/k) - \lambda$$
com parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. (a) Desenhe o diagrama de bifurcação dessa família. (b) Essa equação é um modelo fenômenológico para o número x de indivíduos em uma população com taxa de crescimento per capita

r e capacidade de sobrevivência k, onde indivíduos são removidos da população a uma taxa λ por unidade de tempo. Por exemplo, a variável x poderia representar o número de peixes em uma população e λ a taxa de remoção dos peixes ocasionada pela pesca. Interprete o diagrama de bifurcação usando esse modelo de população. Encontre um valor crítico para λ tal que se esse valor é excedido então a extinção da população é certa. (c) O que aconteceria se λ variasse com o tempo?

Aulas 8-9

1. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = -\sqrt{x}, \qquad \text{para } x \geq 0.$$

Encontre a solução geral, e discuta a extensão de soluções.

2. Determine o intervalo maximal aberto de existência da solução de

$$\dot{x} = \frac{1}{x}, \qquad x(0) = 1.$$

Qual é o intervalo maximal de existência? Discuta sua resposta tendo em vista os teoremas que vimos em aula.

Aula 7

1. Determine a equação integral equivalente ao problema de valor inicial

$$\dot{x} = t^2 + x^4, \qquad x(0) = 1.$$

2. Usando o método empregado para demonstrar a existência de soluções ε-aproximadas, calcule $\varphi(1)$, onde φ é a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = x, \qquad x(0) = 1.$$

Compare o resultado com o fornecido pela solução exata. Para quais valores de h podemos aplicar o teorema sobre existência de soluções ε-aproximadas neste problema?

3. Seja φ uma solução ε-aproximada como nas notas sobre o Teorema de Peano. Considere a função $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\chi(s) = 1$ se $s \in [t_0, t]$ e $\chi(s) = 0$ se $s \notin [t_0, t]$. Mostre que, dado $j \geq 1$, temos

$$\varphi(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{j} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \chi(s) f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))\, ds \qquad \forall t \in [t_0, t_j].$$

4. Considere o problema $\dot{x} = |x|^{-3/4}x + t\sin(\pi/t)$, $x(0) = 0$ onde $x \in \mathbb{R}$. Mostre que soluções aproximadas poligonais para esse problema podem não convergir quando $\varepsilon \to 0$. Dica: Considere $t \geq 0$ e seja $t_j = j\delta$ com $j = 0, 1, 2, \ldots$, onde $\delta = (n + 1/2)^{-1}$ para algum n grande. Se n é par, mostre que a solução poligonal $\varphi_n(t)$ satisfaz $\varphi_n(\delta) = 0$, $\varphi_n(2\delta) = \delta^2$, $\varphi_n(3\delta) > \delta^{3/2}/2$. Uma vez que $\varphi_n(t) \geq t^{3/2}/6$, isso continua valendo enquanto $t < 1/2000$. De fato, para $t \geq 4\delta$ e enquanto $\varphi_n(t) \geq t^{3/2}/6$, temos $\dot{\varphi}(t) > \varphi_n^{1/2}(t - \delta) - t > (1/2)(t - \delta)^{3/2} - t > t^{3/8}/10$. Como $t^{3/8}/10 > (d/dt)(t^{3/2}/6)$, segue o resultado desejado. Se n é impar, $\varphi_n < -t^{3/2}/6$ para $3\delta < t < 1/2000$.

Aula 6

1. Na demonstração do teorema da contração em fibras, usamos que

$$d_Y(\Phi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) \leq \sum_{j=0}^{n} \mu^{n-j} d_Y(\Psi_{\Lambda^j(x)}(y_\infty), y_\infty).$$

Demonstre essa desigualdade, usando indução, a partir da seguinte observação:

$$\begin{aligned}
&d_Y(\psi_{\Lambda^n(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) \\
&\leq d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), \Psi_{\Lambda^n(x)}(y_\infty)) + d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)}(y_\infty), y_\infty) \\
&\leq \mu d_Y(\Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) + d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)}(y_\infty), y_\infty).
\end{aligned}$$

Aula 5

1. Considere a função

$$\begin{aligned}
\Gamma : X \times Y &\to X \times Y \\
(\phi, \Phi) &\mapsto (\Lambda(\phi), \Psi(\phi, \Phi))
\end{aligned}$$

definida na demonstração do teorema de diferenciabilidade das soluções com respeito ao estado inicial x_0. Prove que Γ é contínua.

Aula 4

1. Construa um número infinito de soluções de

$$\dot{x} = x^{1/3}, \qquad x(0) = 0.$$

Porque o teorema de existência e unicidade não se aplica nesse caso?

2. Mostre que $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua e localmente Lipschitz. De fato, mostre que

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{s\in[0,1]} \|Df(x + s(y - x))\| \, |x - y| \quad \forall x, y \in V$$

para todo conjunto compacto V de $\mathbb{R}^m$. Aqui, $Df(x_0)$ denota a matriz jacobiana de f no ponto x_0 e $\|\cdot\|$ denota a norma de operadores. Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{1+m}$. Conclua que a função $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ é contínua e localmente Lipschitz com respeito ao segundo argumento, uniformemente com respeito ao primeiro argumento, e portanto satisfaz as hipóteses do teorema de existência e unicidade. (Sugestão: Comece com o caso $m = n = 1$.)

3. Em cada um dos seguintes casos, a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é contínua e Lipschitz na vizinhança de 0? Se a resposta for sim, encontre a constante de Lipschitz para algum intervalo contendo 0.

   (a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

   (b) $f(x) = |x|^{1/2}$.

   (c) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$.

4. Em cada um dos seguintes casos, calcule a constante de Lipschitz e mostre que a função satisfaz a condição de Lipschitz com respeito à segunda variável na região indicada.

   (a) $f(t, x) = t^2 + x^4$ em $\{(t, x) \mid |t| \leq 1 \text{ e } |x| \leq 3\}$.

   (b) $f(t, x) = p(t)\cos(x) + q(t)\sin(x)$ em $\{(t, x) \mid |t| \leq 100 \text{ e } |x| < \infty\}$ onde p e q são funções contínuas em $[-100, 100]$.

   (c) $f(t, x) = t\exp(-x^2)$ em $\{(t, x) \mid |t| \leq 1 \text{ e } |x| < \infty\}$.

5. Construa as aproximações sucessivas para a solução φ do problema de valor inicial

$$\dot{x} = x, \qquad x(0) = 1$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

6. Construa as aproximações sucessivas para a solução φ do problema de valor inicial

$$\dot{x} = 2t - 2\sqrt{\max(0, x)}, \qquad x(0) = 1$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Essa sequência de aproximações converge?

Aula 3

1. Determine um sistema de primeira ordem que é equivalente à equação de terceira ordem

$$\varepsilon x''' + xx'' - (x')^2 + 1 = 0$$

onde ε é um parâmetro e $'$ denota derivação com respeito à variável independente.

2. Determine as soluções do problema de valor inicial

$$\ddot{x} = -x^2, \qquad x(0) = -1, \qquad \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Sugestão: Escreva a equação como um sistema de primeira ordem usando $y = \dot{x}$. Elimine a dependência temporal usando a regra da cadeia para obter uma equação para y em função de x. Resolva essa equação e substitua a solução em $\dot{x} = y$. Encontre x em função de t.

Aula 2

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\dot{x} = -\frac{1}{1+t}x + 2, \qquad x(0) = 1.$$

2. Relembre os métodos para resolver equações lineares de segunda ordem na forma

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega^2 x = A\cos(\Omega t).$$

Determine a solução geral de

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 2\cos(t).$$

Determine também a solução do problema de valor inicial com $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

3. Encontre a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Aula 1

1. Classifique as seguintes equações diferenciais. Em cada um dos casos, diga se a equação é linear, autônoma, e qual é a ordem da equação.

(a) $y'(x) + y(x) = 0$.
(b) $\dot{u}(t) = t\sin(u(t))$.
(c) $y(t)^2 + 2y(t) = 0$.
(d) $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$.

2. Quais das seguintes equações diferenciais para $y(x)$ são lineares?

   (a) $y' = \sin(x)y + \cos(y)$.
   (b) $y' = \sin(y)x + \cos(x)$.
   (c) $y' = \sin(x)y + \cos(x)$.

3. Transforme as seguintes equações diferenciais em sistemas de primeira ordem.

   (a) $\ddot{x} + t\sin(\dot{x}) = x$.
   (b) $\ddot{x} = -y$, $\ddot{y} = x$.

   O sistema em (b) é linear. O sistema de primeira ordem correspondente é também linear? Esse sempre é o caso?

4. Considere a equação $x^{(k)} = f(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)})$. Prove que se $\phi(t)$ é uma solução dessa equação, então $\phi(t - t_0)$ também é uma solução.

Referências

[1] F. Brauer e J. A. Nohel, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction*, Dover, 1969.

[2] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Second Edition, Texts in Applied Mathematics 34, Springer, 2006.

[3] Earl. A. Coddington e N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Krieger, 1984.

[4] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate Studies in Mathematics 140, AMS, 2012.