Prova 1

MAT 871 - EDOs I - Turma U

10 de outubro de 2016

Justifique todas as respostas. Duração: 1h40m.

1. (12 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continua e Lipschitz, e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) \\
\dot{y} &= g(x)y \\
x(t_0) &= x_0 \\
y(t_0) &= y_0,
\end{aligned}
$$

onde t_0, x_0 e y_0 são números reais. Esse problema tem apenas uma solução? Justifique detalhadamente sua resposta.

2. (11 pontos) Para $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x^2 \cos(t) \\
x(0) &= x_0,
\end{aligned}
$$

onde x_0 é um número real. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, determine o intervalo maximal de existência da solução. Justifique porque ele é maximal.

3. (6 pontos) Para $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 2t(1 + x) \\
x(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Calcule as quatro primeiras aproximações sucessivas para a solução do problema partindo da aproximação $\varphi_1(t) = 0$. Calcule $\varphi_n(t) - \varphi(t)$, onde φ é a solução exata do problema e φ_n é a n-ésima aproximação sucessiva.

4. (6 pontos) Prove que a família de funções $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$
\varphi_t(x, y) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

define um fluxo em $\mathbb{R}^2$.

Respostas

1.

Observamos que a primeira equação do sistema não depende de y. Como a função f é contínua e Lipschitz, pelo teorema de existência e unicidade, existe um intervalo I com $t_0 \in I$ e uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 que é solução da equação $\dot{x} = f(x)$ em I com $\varphi(t_0) = x_0$. Logo, para que exista uma solução do sistema de equações, é necessário que $x = \varphi$. Seja J um intervalo aberto tal que $J \subset \overline{J} \subset I$ e $t_0 \in J$. Procuramos uma solução da equação $\dot{y} = g(\varphi(t))y$ onde $(t, y) \in J \times \mathbb{R}$ com $y(t_0) = y_0$. A função $g(\varphi(t))y$ é contínua em $J \times \mathbb{R}$ e Lipschitz com respeito à variável y para cada $t \in J$. De fato, se $(t_n, y_n) \to (a, b)$, então $t_n \to a$, $y_n \to b$ e $g(\varphi(t_n)) \to g(\varphi(a))$, pois $g \circ \varphi$ é contínua. Logo $g(\varphi(t_n))y_n \to g(a)b$. Além disso, $|g(\varphi(t))y - g(\varphi(t))z| = |g(\varphi(t))|\,|y-z| \leq C|y-z|$, pois $g\circ\varphi$ é contínua em J. Pelo teorema de existência e unicidade, existe um intervalo J_1 com $t_0 \in J_1$ e uma função $\psi : J_1 \to \mathbb{R}$ que é solução da equação $\dot{y} = g(\varphi(t))y$ em J_1 com $\psi(t_0) = y_0$. Logo, existe apenas uma solução $(\varphi, \psi) : J \cap J_1 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do sistema de equações com $(\varphi, \psi)(t_0) = (x_0, y_0)$. Essa solução é de classe C^1 pois cada componente é de classe C^1.

2.

Observamos que o campo vetorial da equação é de classe C^1. Portanto o problema tem apenas uma solução para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se $x_0 = 0$, então $\varphi(t) = 0$ para $t \in \mathbb{R}$ é a solução do problema. Logo $\mathbb{R}$ é o intervalo maximal de existência.

Se $x_0 \neq 0$ e $x \neq 0$, como a equação é separável temos $\int x^{-2}dx = \int \cos t dt$, ou seja, $x = (-c - \sin t)^{-1}$. A condição inicial implica $c = -1/x_0$. Logo a solução do problema é $\varphi(t) = (1/x_0 - \sin t)^{-1}$. Se $x_0 < 1$, a solução está definida para todo t, logo o intervalo maximal de existência é $\mathbb{R}$. Se $x_0 \geq 1$, a solução está definida para $t \in (-\pi - \arcsin x_0^{-1}, \arcsin x_0^{-1})$. Se $x_0 \leq -1$, a solução está definida para $t \in (\arcsin x_0^{-1}, \pi - \arcsin x_0^{-1})$. Esses intervalos são maximais pois $\varphi(t)| \to \infty$ quando t tende aos extremos desses intervalos partindo do interior dos intervalos.

(De fato, se considerarmos o problema de valor inicial no domínio em que $|x| < A$ com $A > x_0$, para que $(t, \varphi(t))$ pertença ao domínio para $t > 0$, devemos ter $t < \arcsin(x_0^{-1} - A^{-1})$. Isso implica que a solução φ do parágrafo anterior deixa qualquer domínio onde $x^2 \cos t$ é limitada. Portanto não podemos estendê-la.)

3.

Para $n \geq 2$, temos $\varphi_n(t) = \int_0^t 2s(1 + \varphi_{n-1}(s))\, ds = t^2 + \int_0^t 2s\varphi_{n-1}(s)\, ds$. Logo $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_2(t) = t^2$, $\varphi_3(t) = t^2 + t^4/2$, $\varphi_4(t) = t^2 + t^4/2 + t^6/6$ e $\varphi_5(t) = t^2 + t^4/2 + t^6/6 + t^8/24$.

Por outro lado, para $x > -1$, temos $\int (1 + x)^{-1}\, dx = \int 2t\, dt$, ou seja, $\ln(1+x) = t^2 + c$. A condição inicial implica $c = 0$. Logo $x(t) = \exp(t^2) - 1$. Por inspeção, concluímos que $\varphi_n(t) - \varphi(t) = \sum_{j=n}^{\infty} (t^2)^j/j!$.

4.

Basta verificar que $\varphi_0 = I$,

$$\varphi_t^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos t \end{bmatrix} = \varphi_{-t}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_t \circ \varphi_s &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t+s) & -\sin(t+s) \\ \sin(t+s) & \cos(t+s) \end{bmatrix} = \varphi_{t+s}. \end{aligned}$$