Prova 2

MAT 871 - EDOs I - Turma U

23 de novembro de 2016

Justifique todas as respostas. Duração: 2h30.

1. (6 pontos) Aplique a desigualdade de Gronwall para provar a seguinte proposição: Se $t \mapsto \beta(t)$ e $t \mapsto \gamma(t)$ são soluções de $\dot{x} = f(x)$ em $[0, T]$, onde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $T > 0$, então existe uma constante $L > 0$ tal que
$$|\beta(t) - \gamma(t)| \leq |\beta(0) - \gamma(0)| e^{Lt} \qquad \text{para } t \in [0, T].$$

2. (8 pontos) Prove que
$$U(t) = \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \quad \text{para } 0 < t < \infty$$
é uma matriz fundamental do sistema
$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{onde} \quad A(t) = \frac{1}{t^2} \begin{bmatrix} 0 & t^2 \\ -3 & 3t \end{bmatrix} \quad \text{para } 0 < t < \infty.$$

3. (6 pontos) Calcule $\exp(tA)$ para $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. (Sugestão: $A = D + N$.)

4. Considere o sistema de equações diferenciais
$$\dot{x} = Ax \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) (1 ponto) Calcule uma matriz de mudança de coordenadas que diagonaliza a matriz A.
   (b) (3 pontos) Determine a matriz principal em $t = 0$ para o sistema.
   (c) (1 ponto) Determine os subespaços invariantes de dimensão 1 do sistema.
   (d) (1 ponto) Resolva o problema de valor inicial para o sistema com a condição inicial $x(0) = (1, 1)$.
   (e) (1 ponto) Esboce o retrato de fase.

5. Considere a equação diferencial

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) (2 pontos) Determine um sistema de primeira ordem equivalente a essa equação.

(b) (4 pontos) Calcule a matriz principal em $t = 0$ do sistema obtido em (a).

(c) (1 ponto) Decida se $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável ou instável do sistema obtido em (a).

(d) (1 ponto) Esboce o retrato de fase do sistema obtido em (a).

Proposição. Seja A uma matriz real $n \times n$. Considere a equação $\dot{x} = Ax$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Se v é um autovetor de A com autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$ tal que $\beta \neq 0$, então a parte imaginária de v não é zero. Nesse caso, se $v = u + iw$ com u e w em $\mathbb{R}^n$, então

$$t \mapsto e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w\big)$$

e

$$t \mapsto e^{\alpha t}\big(\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)w\big)$$

são soluções da equação. Essas soluções são linearmente independentes.

Respostas

1.

Como β e γ são soluções da equação, temos que

$$\beta(t) = \beta(0) + \int_0^t f(\beta(s))\,ds \qquad \text{e} \qquad \gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t f(\gamma(s))\,ds.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|\beta(t) - \gamma(t)| &= \left|\beta(0) - \gamma(0) + \int_0^t (f(\beta(s)) - f(\gamma(s)))\,ds\right| \\
&\leq |\beta(0) - \gamma(0)| + \left|\int_0^t (f(\beta(s)) - f(\gamma(s)))\,ds\right| \\
&\leq |\beta(0) - \gamma(0)| + \int_0^t |f(\beta(s)) - f(\gamma(s))|\,ds.
\end{aligned}$$

A função f é uma função Lipschitz contínua em $\mathbb{R}^n$ pois f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$. Portanto, existe $L > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ para todo x e todo y em $\mathbb{R}^n$. Consequentemente

$$|\beta(t) - \gamma(t)| \leq |\beta(0) - \gamma(0)| + \int_0^t L|\beta(s) - \gamma(s)|\,ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall, concluímos que

$$|\beta(t) - \gamma(t)| \leq |\beta(0) - \gamma(0)| \exp\left(\int_0^t L\,ds\right) = |\beta(0) - \gamma(0)|e^{Lt}.$$

2.

Sejam $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ o primeiro e o segundo vetor-coluna de $U(t)$, ou seja, $\varphi_1(t) = [t\ 1]^T$ e $\varphi_2(t) = [t^3\ 3t^2]^T$. Observamos que $\dot{\varphi}_1(t) = [1\ 0]^T$, $A(t)\varphi_1(t) = [1\ 0]^T$, $\dot{\varphi}_2(t) = [3t^2\ 6t]^T$ e $A(t)\varphi_2(t) = [3t^2\ 6t]^T$. Logo φ_1 e φ_2 são soluções da equação. Portanto $U(t)$ é uma matriz solução. Vamos provar que φ_1 e φ_2 são linearmente independentes em $0 < t < \infty$. Suponha que $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 0$ em $0 < t < \infty$, ou seja, $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0$ para todo $0 < t < \infty$. Então $c_1 t + c_2 t^3 = 0$ e $c_1 + c_2 3t^2 = 0$ para todo $0 < t < \infty$. Posto de outra forma

$$\begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{para } 0 < t < \infty.$$

Como $\det\left(\begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix}\right) = 2t^3 \neq 0$, o sistema escrito acima tem apenas a solução $(c_1, c_2) = (0, 0)$ para cada $t \in (0, \infty)$. Em particular, isso implica que φ_1 e φ_2 são linearmente independentes. Em resumo, as colunas de $U(t)$

são linearmente independentes e são soluções da equação. Portanto $U(t)$ é uma matriz fundamental.

3.

Escrevemos $A = D + N$ com $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observamos que $AD = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $DA = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo A e D comutam. Portanto tA e tD comutam. Usando as propriedades da exponencial de matrizes, temos que $\exp(tA) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN)$. Calculamos

$$\exp(tA) = \exp\left(\begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Além disso

$$\exp(tN) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(tN)^j = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pois $N^2 = 0$. Portanto

$$\exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.

(a) Como A está na forma triangular, os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Um autovetor associado a λ_1 é $u = (1, 0)$, e um autovetor associado a λ_2 é $v = (-1, 1)$. Portanto, uma matriz de mudança de coordenadas que diagonaliza A é $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Calculamos $B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Observamos que

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, usando as propriedades da exponencial de matrizes, obtemos

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tBB^{-1}ABB^{-1}) \\ &= \exp(B(tB^{-1}AB)B^{-1}) \\ &= B\exp(tB^{-1}AB)B^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

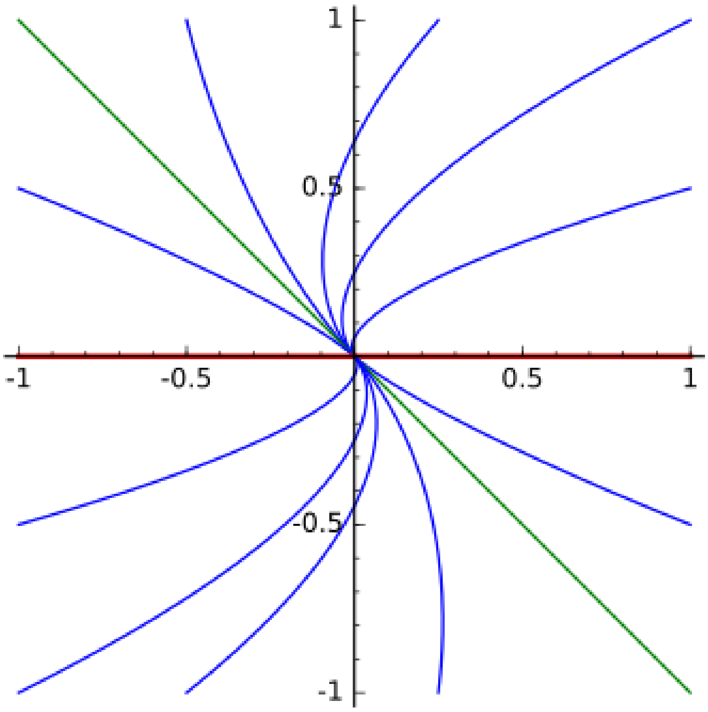
(c) Os conjuntos invariantes do sistema são os autoespaços da matriz A, ou seja, os subespaços

$$S = \{t(1,0) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad W = \{t(-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(d) A solução do problema é

$$\varphi(t) = e^{tA}x(0) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(e)



5.

(a) Definimos $u_1 = x$ e $u_2 = \dot{x}$. Logo $\dot{u}_2 = \ddot{x} = -4x - \dot{x} = -4u_1 - u_2$ e $\dot{u}_1 = \dot{x} = u_2$. Consequentemente, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -4u_1 - u_2. \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\dot{u} = Au \qquad \text{onde} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Um cálculo simples mostra que $\lambda = -1/2 + i(\sqrt{15}/2)$ é um autovalor de A e $v = (1, \lambda)$ é um autovetor associado. Seja $\alpha = -1/2$ e $\beta = \sqrt{15}/2$.

Então $\lambda = \alpha + i\beta$ e $v = u + iw$ com $u = (1, \alpha)$ e $w = (0, \beta)$. Pela Proposição, temos que

$$t \mapsto e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w\big) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t), \alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t))$$

e

$$t \mapsto e^{\alpha t}\big(\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)w\big) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t), \alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t))$$

são soluções do sistema e essas soluções são linearmente independentes. Logo

$$U(t) = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ \alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t) & \alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

é uma matrix fundamental do sistema. Portanto

$$\begin{aligned} \Psi(t) = U(t)U(0)^{-1} &= U(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha/\beta & 1/\beta \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) - (\alpha/\beta)\sin(\beta t) & (1/\beta)\sin(\beta t) \\ (-\beta - \alpha^2/\beta)\sin(\beta t) & (\alpha/\beta)\sin(\beta t) + \cos(\beta t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é a matrix principal em $t = 0$.

(c) Como a parte real de cada autovalor de A é negativa, a origem $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

(d)