Prova Substitutiva

MAT 871 - EDOs I - Turma U

7 de dezembro de 2016

Justifique todas as respostas. Duração: 2h30.

1. (7 pontos) Enuncie um teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial associado à equação $\dot{x} = f(t, x)$ onde f está definida em um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

2. (7 pontos) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 + 1, \\ &\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 - 1, \\ &x(0) = 0. \end{aligned}$$

   Calcule as três primeiras aproximações sucessivas para a solução φ desse problema, começando com a aproximação $\varphi_0(t) \equiv 0$.

3. (6 pontos) Determine todas as funções $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínuas não negativas tais que

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)\, ds \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

4. (7 pontos) Verifique que $\xi(t) = t$ é solução da equação

$$t^2 \ddot{x} + 2t\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{para } t > 0.$$

   Determine uma segunda solução η dessa equação tal que ξ e η sejam linearmente independentes.

5. Considere o sistema de equações

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) (4 pontos) Determine a matriz principal em $t = 0$ do sistema.

   (b) (2 pontos) Diga se a solução de equilíbrio $\varphi(t) \equiv 0$ é estável ou instável.

   (c) (2 ponto) Esboce o retrato de fases do sistema no sistema de coordenadas original.

Respostas

1.

Seja D um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Suponha que $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua tal que para todo $(t, x) \in D$ e todo $(t, y) \in D$ existe $L > 0$ tal que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$. Suponha que $(t_0, x_0) \in D$. Então existe um intervalo I que contém t_0 e apenas uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

2.

Seja $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 + 1, x_1^2 - x_2^2 - 1)$. Podemos escrever o problema como $\frac{d}{dt}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ com $x(0) = 0$. Logo as aproximações sucessivas são

$$\varphi_0(t) = (0, 0)$$

e

$$\varphi_n(t) = (0, 0) + \int_0^t f(\varphi_{n-1}^{(1)}(s), \varphi_{n-1}^{(2)}(s))\, ds$$

para $n \geq 1$, onde $\varphi_k(t) = (\varphi_k^{(1)}(t), \varphi_k^{(2)}(t))$ para $k \geq 0$. Calculando para $n = 1$ e $n = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \int_0^t f(\varphi_0^{(1)}(s), \varphi_0^{(2)}(s))\, ds \\
&= \int_0^t f(0, 0)\, ds = \int_0^t (1, -1)\, ds = \left(\int_0^t ds,\ -\int_0^t ds\right) = (t, -t)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= \int_0^t f(\varphi_1^{(1)}(s), \varphi_1^{(2)}(s))\, ds = \int_0^t f(s, -s)\, ds \\
&= \int_0^t (2s^2 + 1, -1)\, ds = \left(\int_0^t (2s^2 + 1) ds,\ -\int_0^t ds\right) = (2t^3/3 + t, -t).
\end{aligned}$$

3.

Temos que

$$f(t) \leq 0 + \int_0^t 1 \cdot f(s)\, ds \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

Observamos que $\alpha(t) \equiv 0$, $\dot{\alpha}$, $\psi(t) \equiv 1$ e f são funções contínuas em $[0, 1]$ não negativas. Portanto estamos sob as hipóteses do Lema de Gronwall. Logo

$$f(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \psi(s) ds\right) = 0e^t = 0$$

para todo $t \in [0, t]$. Como f é não negativas, concluímos que $f(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Ou seja, a função zero é a única função que satisfaz a desigualdade em questão.

4.

Observamos que $t^2\ddot{\xi}(t) + 2t\dot{\xi}(t) - 2\xi(t) = t^2 \cdot 0 + 2t \cdot 1 - 2t = 0$. Como $t > 0$, a equação diferencial dada é equivalente a $\ddot{x} + (2/t)\dot{x} - (2/t^2)x = 0$, ou ainda, definindo $u = x$ e $v = \dot{x}$,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & -2/t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{para } t > 0.$$

Observamos que $\varphi(t) = [\xi(t)\,\dot{\xi}(t)]^T = [t\,1]^T$ é solução desse sistema. Seja $\psi(t)$ uma solução desse sistema tal que $\{\varphi, \psi\}$ é linearmente independente. Então $\dot{\psi}_1 = \psi_2$ e $\dot{\psi}_2 = (2/t^2)\psi_1 - (2/t)\psi_2$. Além disso, pelo Teorema de Liouville,

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \psi_1(1) \\ \varphi_2(1) & \psi_2(1) \end{vmatrix} \exp\left(\int_1^t (-2/s)\, ds\right),$$

ou seja,

$$t\psi_2(t) - \psi_1(t) = \frac{c_1}{t^2}$$

para uma constante $c_1 \neq 0$. Isso implica $\psi_1(t) = t\psi_2(t) + c_1/t^2$. Substituindo essa identidade em $\dot{\psi}_1 = \psi_2$, obtemos $t\dot{\psi}_2(t) - 2c_1/t^3 = 0$. Resolvendo essa equação para $\psi_2(t)$, concluímos que $\psi_2(t) = -2c_1/(3t^3) + c_2$ e portanto $\psi_1(t) = c_1/(3t^2) + c_2 t$. Por construção, ψ_1 e ξ são linearmente independentes. Em particular, $\eta(t) = 1/t^2 + t$ e $\xi(t)$ são linearmente independentes.

5.

(a) Vamos calcular e^{tA}, que é a matriz principal do sistema em $t = 0$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Um autovetor associado a λ_1 é $u = (1, 2)$. Um autovetor associado a λ_2 é $v = (2, 1)$. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{aligned} e^{tA} &= BB^{-1}e^{tA}BB^{-1} = Be^{tB^{-1}AB}B^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1/3)e^{-t} + (4/3)e^{2t} & (2/3)e^{-t} + (-2/3)e^{2t} \\ (-2/3)e^{-t} + (2/3)e^{2t} & (4/3)e^{-t} + (-1/3)e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) A solução de equilíbrio é instável pois a matriz A possui um autovalor com parte real positiva.

(c)