# O Teorema de Peano

**Equações de primeira ordem**

Seja $D$ um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e seja

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto f(t, x) \end{aligned}$$

uma função contínua. Vamos considerar o seguinte problema: Encontrar um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tais que

1. $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$
2. $(t, \varphi(t)) \in D$ para todo $t \in I$
3. $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Esse problema é chamado *equação diferencial ordinária de primeira ordem* e é denotado por

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{E}$$

Uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as Condições 1-3 é chamada *solução* da equação diferencial em $I$. A função $f$ é chamada o *campo vetorial* da equação diferencial.

**Problema de valor inicial**

Em particular, para cada $(t_0, x_0) \in D$, podemos considerar o seguinte problema: Encontrar uma solução $\varphi$ de (E) em $I$ tal que

4. $t_0 \in I$
5. $\varphi(t_0) = x_0$.

Esse problema é chamado *problema de valor inicial* associado a (E) e é denotado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{PVI}$$

Uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as Condições 1-5 é chamada *solução* do problema de valor inicial em $I$ com estado inicial $x_0$ e instante inicial $t_0$. A segunda igualdade em (PVI) é chamada *condição inicial.* O estado inicial $x_0$ e o instante inicial $t_0$ são chamados *dados iniciais.*

**Equação integral**

O problema de valor inicial (PVI) é equivalente ao seguinte problema: Encontrar um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tais que

1. $\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n)$
2. $(t, \varphi(t)) \in D$ para todo $t \in I$

3. $t_0 \in I$
4. $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$ para todo $t \in I$.

Esse problema é chamado *equação integral* e é denotado por

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{EI}$$

Uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as Condições 1-4 é chamada *solução* da equação integral em $I$. Mais precisamente, a equivalência entre (PVI) e (EI) é fornecida pelo seguinte teorema:

**Teorema 1** ((PVI) é equivalente a (EI))**.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua em um conjunto aberto $D$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se $\varphi$ é uma solução de* (PVI) *em $I$, então $\varphi$ é uma solução de* (EI) *em $I$. Por outro lado, se $\varphi$ é uma solução de* (EI) *em $J$, então $\varphi$ é uma solução de* (PVI) *em $J$.*

*Demonstração.* Se $\varphi$ é uma solução de (PVI) em $I$, então $t_0 \in I$, a derivada de $\varphi$ é contínua e

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{para todo } t \in I.$$

Integrando de $t_0$ a $t$ os dois lados dessa igualdade, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \text{para todo } t \in I.$$

Como $\varphi(t_0) = x_0$, concluímos que $\varphi$ satisfaz (EI) em $I$.

Por outro lado, se $\varphi$ é uma solução de (EI) em $J$, então $t_0 \in J$, a função $\varphi$ é contínua e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \text{para todo } t \in J.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função $t \mapsto \varphi(t)$ é diferenciável e

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad \text{para todo } t \in J.$$

Além disso, temos $\varphi(t_0) = x_0$. Portanto $\varphi$ é solução de (PVI) em $J$. □

**Soluções aproximadas**

Uma solução $\varepsilon$-aproximada de (E) em $I$ é uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tal que

1. $\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n)$
2. $(t, \varphi(t)) \in D$ para todo $t \in I$

3. A derivada de $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ existe e é contínua exceto em um conjunto finito de pontos de $I$, denotado por $S$, onde $\dot{\varphi}$ tem descontinuidades simples. (Uma função $g : I \to \mathbb{R}^n$ é dita ter descontinuidade simples em $s$ se os limites laterais de $g(t)$ quando $t \to s-$ e $t \to s+$ existem mas não são iguais.)
4. $|\dot{\varphi}(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon \quad$ para todo $t \in I \setminus S$.

Seja $(t_0, x_0)$ um ponto de $D$, e sejam $a > 0$ e $b > 0$ tais que o conjunto

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}$$

esteja contido em $D$. Como $R$ é compacto e $f$ é contínua em $R$, a função $f$ é limitada em $R$ (Teorema X). Além disso, o máximo de cada uma das componentes de $f$ é atingido em $R$ (Teorema X). Definimos

$$M_j = \max\{|f_j(t, x)| \mid (t, x) \in R\} \quad \text{para } j = 1, \ldots, n,$$
$$M = (M_1^2 + \cdots + M_n^2)^{1/2}$$

e

$$h = \begin{cases} \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} & \text{se } M \neq 0 \\ a & \text{se } M = 0. \end{cases}$$

**Teorema 2** (Existência de soluções $\varepsilon$-aproximadas)**.** *Se $f : R \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma solução $\varepsilon$-aproximada $\varphi$ de* (E) *em $[t_0 - h, t_0 + h]$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.*

*Demonstração.* Seja $\varepsilon > 0$. Vamos construir uma solução $\varepsilon$-aproximada no intervalo $[t_0, t_0 + h]$. Uma construção semelhante define a solução no intervalo $[t_0 - h, t_0]$.

Como $f$ é contínua em $R$ e o conjunto $R$ é compacto, a função $f$ é uniformemente contínua em $R$ (Teorema X). Portanto, para o $\varepsilon > 0$ já escolhido, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| \leq \delta \quad \text{e} \quad |x - y| \leq \delta$$

implicam

$$|f(t, x) - f(s, y)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } (t, x) \in R \text{ e todo } (s, y) \in R.$$

Vamos dividir o intervalo $[t_0, t_0 + h]$ em $k$ partes. Considere $k \in \mathbb{N}$. Definimos $t_k = t_0 + h$. Sejam $t_1, t_2 \ldots, t_{k-1}$ números reais tais que

1. $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$
2. $\max\{|t_j - t_{j-1}| \mid j = 1, \ldots, k\} \leq \begin{cases} \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\} & \text{se } M \neq 0 \\ \delta & \text{se } M = 0 \end{cases}.$

Os números $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ dividem o intervalo $[t_0, t_0+h]$ em $k$ intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\dots$, $[t_{k-1}, t_k]$ cujos tamanhos não excedem um determinado valor máximo.

A solução $\varepsilon$-aproximada no intervalo $[t_0, t_0+h]$ é construída da seguinte forma: A partir do ponto $(t_0, x_0)$, construímos um segmento de reta com vetor diretor $(1, f(t_0, x_0))$. Esse segmento intersecta o plano $t = t_1$ em algum ponto $(t_1, x_1)$. A partir do ponto $(t_1, x_1)$, construímos um segmento de reta com vetor diretor $(1, f(t_1, x_1))$. Esse segmento intersecta o plano $t = t_2$ em algum ponto $(t_2, x_2)$. Prosseguindo dessa forma, em $k$ passos obtemos o $k$-ésimo segmento de reta com vetor diretor $(1, f(t_{k-1}, x_{k-1}))$ que intersecta o plano $t = t_k$ em um ponto $(t_k, x_k)$. O nosso candidato a solução $\varepsilon$-aproximada é obtido da união desses $k$ segmentos de reta. Essa união é uma curva poligonal contínua que parte do ponto $(t_0, x_0)$ e termina em um ponto $(t_k, x_k)$ do plano $t = t_k$. Analiticamente, a função $\varphi$ (candidata a solução $\varepsilon$-aproximada) é definida recursivamente pela seguinte fórmula:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t = t_0 \\ \varphi(t_{j-1}) + f(t_{j-1}, \varphi(t_{j-1}))(t - t_{j-1}) & \text{se } t \in (t_{j-1}, t_j] \\ & \text{onde } j = 1, \dots, k. \end{cases} \tag{1}$$

Observamos que a curva poligonal $\gamma$ construída acima é dada por

$$\gamma = \{(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in [t_0, t_0+h]\}.$$

Vamos verificar que $\varphi$ satisfaz as quatro condições para ser uma solução $\varepsilon$-aproximada em $[t_0, t_0+h]$. A verificação para a solução em $[t_0-h, t_0]$ pode ser feita de forma semelhante.

É simples verificar que as Condições 1 e 3 são satisfeitas, ou seja, que $\varphi \in C([t_0, t_0+h], \mathbb{R}^n)$ e que a derivada de $\varphi : [t_0, t_0+h] \to \mathbb{R}^n$ existe e é contínua exceto nos pontos $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ onde $\dot{\varphi}$ tem descontinuidades simples. De fato

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} f(t_0, \varphi(t_0)) & \text{se } t = t_0 \\ f(t_{j-1}, \varphi(t_{j-1})) & \text{se } t \in (t_{j-1}, t_j] \\ & \text{onde } j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Portanto $\dot{\varphi}$ tem descontinuidades simples em $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$.

Vamos verificar que a Condição 2 é satisfeita, ou seja, que $\gamma \subseteq R$. Vamos mostrar que $\gamma \subseteq T \subseteq R$ onde

$$\begin{aligned} T = \{(t, y_t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in [t_0, t_0+h] \text{ e} \\ |(y_t)_j - (x_0)_j| \leq M_j(t - t_0) \text{ para } j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Se $M_j \neq 0$, então $M_j(t - t_0) \leq M_j h \leq \min M_j \left\{a, \frac{b}{M}\right\} \leq M_j \frac{b}{M}$. Logo $|y - x_0| \leq b$. Se $M = 0$, então $|y - x_0| = 0$. Além disso $|t - t_0| \leq h \leq a$.

Portanto $T \subseteq R$. Usando recursivamente as expressões em (1), obtemos

$$\varphi(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{j-1} f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}) + f(t_{j-1}, \varphi(t_{j-1}))(t - t_{j-1})$$

para $t \in (t_{j-1}, t_j]$ e $\varphi(t) = x_0$ para $t = t_0$. Logo

$$\varphi_p(t) - (x_0)_p \leq M_p \sum_{k=1}^{j-1}(t_k - t_{k-1}) + M_p(t - t_{j-1}) = M_p(t - t_0)$$

para $p = 1, \ldots, n$. Analogamente, obtemos $-M_p(t - t_0) \leq \varphi_p(t) - (x_0)_p$. Portanto $\gamma \subseteq T$ e consequentemente $|\varphi(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$. Em resumo, provamos que $\gamma \subseteq T \subseteq R$.

Nos resta verificar que $\varphi$ satisfaz a Condição 4. Para isso, primeiro vamos mostrar que

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq M|t - s| \quad \text{para todo } t, s \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{2}$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que $t > s$. Usando a expressão (1) para $\varphi(t)$ com $t \in (t_{j-1}, t_j]$ e para $\varphi(s)$ com $s \in (t_{l-1}, t_l]$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(s) = &\sum_{k=l}^{j-1} f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}) \\ &+ f(t_{j-1}, \varphi(t_{j-1}))(t - t_{j-1}) - f(t_{l-1}, \varphi(t_{l-1}))(s - t_{l-1}).\end{aligned}$$

Repetindo o argumento usado acima, concluímos que

$$-M_p(t - s) \leq \varphi_p(t) - \varphi_p(s) \leq M_p(t - s).$$

Portanto $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq M|t - s|$.

Finalmente, passamos à Condição 4. Se $t \in (t_{j-1}, t_j]$, então

$$|t - t_{j-1}| \leq \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\} \leq \delta$$

e

$$|\varphi(t) - \varphi(t_{j-1})| \leq M|t - t_{j-1}| \leq M \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\} \leq M\frac{\delta}{M} = \delta.$$

Logo, calculando $\dot{\varphi}$ e usando a continuidade uniforme de $f$ em $R$, obtemos

$$|\dot{\varphi}(t) - f(t, \varphi(t))| = |f(t_{j-1}, \varphi(t_{j-1})) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + h] \setminus \{t_1, \ldots, t_{k-1}\}$. Portanto $\varphi$ satisfaz a Condição 4. Demonstramos que $\varphi$ é uma solução $\varepsilon$-aproximada. □

**Existência de soluções**

**Teorema 3** (de Peano)**.** *Se $f : R \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então existe uma solução $\varphi \in C^1([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$ de* (E) *tal que $\varphi(t_0) = x_0$.*

*Demonstração.* Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência decrescente de números reais positivos tais que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Pelo Teorema 2, para cada $\varepsilon_n$ existe uma solução $\varepsilon_n$-aproximada $\varphi_n$ de (E) em $[t_0 - h, t_0 + h]$ tal que $\varphi_n(t_0) = x_0$. Escolhemos $\varphi_n$ da forma (1). Da demonstração do Teorema 2 (veja (2)), temos que

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq M|t - s| \quad \text{para todo } t, s \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{3}$$

Aplicando essa estimativa para $s = t_0$, obtemos

$$|\varphi_n(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq M \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \leq b$$

para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada por $b + |x_0|$. Usando novamente (3), obtemos que, para todo $\varepsilon > 0$, a desigualdade

$$|t - s| \leq \varepsilon/M$$

implica

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t, s \in [t_0 - h, t_0 + h] \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma família equicontínua de funções no intervalo compacto $[t_0 - h, t_0 + h]$. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência $(\varphi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente no intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$ para uma função $\varphi$, que é contínua pois cada $\varphi_n$ é contínua (Teorema X). De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
|\varphi(t) - \varphi(s)| &= |\varphi(t) - \varphi_{n_k}(t) + \varphi_{n_k}(s) - \varphi(s) + \varphi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(s)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |\varphi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(s)| \\
&\leq \varepsilon + M|t - s|.
\end{aligned}$$

Como o valor de $\varepsilon$ é arbitrário, essa estimativa implica

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq M|t - s| \quad \text{para todo } t, s \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

A função limite $\varphi$ é candidata a solução de (E) com as condições desejadas. Vamos provar que ela é de fato uma solução.

Para demonstrar que a função $\varphi$ é a solução procurada, vamos representar na forma integral a relação que define $\varphi_n$ como uma solução $\varepsilon_n$-aproximada. Observamos que cada $\varphi_n$ é uma função contínua, que é linear por partes no intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$. Portanto, a derivada de $\varphi_n$ é uma função constante por partes que está definida em $[t_0-h, t_0+h]\setminus S_n$, onde $S_n$ denota o conjunto de descontinuidades de $\dot{\varphi}_n$ (que é um conjunto finito). Definimos a função $\Delta_n : [t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} \dot{\varphi}_n(t) - f(t, \varphi_n(t)) & \text{se } t \in [t_0 - h, t_0 + h] \setminus S_n \\ 0 & \text{se } t \in S_n. \end{cases}$$

Observando que $\dot{\varphi}_n$ e $\Delta_n$ têm um conjunto contável de discontinuidades, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \varphi_n(t_0) + \int_{[t_0,t]\setminus S_n} \dot{\varphi}_n(s)\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} ds \begin{cases} \dot{\varphi}_n(s) & \text{se } s \in [t_0 - h, t_0 + h] \setminus S_n \\ 0 & \text{se } s \in S_n. \end{cases} \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} ds \begin{cases} f(s, \varphi_n(s)) & \text{se } s \in [t_0 - h, t_0 + h] \setminus S_n \\ 0 & \text{se } s \in S_n. \end{cases} + \int_{t_0}^{t} \Delta_n(s)\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \Delta_n(s)\, ds. \end{aligned}$$

Como $\varphi_n$ é uma solução $\varepsilon_n$-aproximada, vale que $|\Delta_n(t)| \leq \varepsilon_n$ para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{t_0}^{t} \Delta_n(s)\, ds \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\Delta_n(s)|\, ds \leq (t - t_0) \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Como $f$ é uniformemente contínua em $R$, e $\varphi_{n_k} \to \varphi$ uniformemente, temos que $f(t, \varphi_{n_k}(t)) \to f(t, \varphi(t))$ uniformemente (Teorema X)—Aqui, ambas as convergências são no intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$ quando $k \to \infty$. Portanto

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t) \\ &= x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} \Delta_{n_k}(s)\, ds. \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \text{para todo } t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1, concluímos que $\varphi$ é solução de (PVI) em $[t_0 - h, t_0 + h]$. Em particular $\varphi \in C^1([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$. □

**Teorema 4** (Existência local de soluções)**.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua em um conjunto aberto $D$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Então para todo $(t_0, x_0) \in D$, existe uma solução de* (PVI) *com estado inicial $x_0$ e instante inicial $t_0$ em algum intervalo $I$ que contém $t_0$.*

*Demonstração.* Dado $(t_0, x_0) \in D$, para $r > 0$, definimos

$$B(x_0, r) = \{(t, x) \in D \mid |(t, x) - (t_0, x_0)| < r\}.$$

Como $D$ é um conjunto aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq D$. Sejam $a > 0$ e $b > 0$ tais que o conjunto

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}$$

esteja contido em $B(x_0, r)$. Considere o problema de valor inicial em $R$. Pelo Teorema de Peano (Teorema 3), existe uma solução em um intervalo $I$, contendo $t_0$, com valor $x_0$ no instante $t_0$. $\square$