Lista de Exercícios 1
Matrizes e sistemas lineares

MAT 038 – GAAL

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule as matrizes $A + 2B$, $A - B$, A^T e $A^T B$.

2. Sejam A, B e C matrizes dos tipos 3×4, 4×7 e 7×3, respectivamente. Determine o tamanho das seguintes matrizes ou diga se o produto não está definido: AB, AC, BA, BC, CA e CB.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule os seguintes produtos de matrizes, ou diga se o produto não está definido: AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA e CB.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule os produtos AI_3 e $0A$.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^2, A^3 e A^4.

(b) É correto afirmar que B^2 está definida para qualquer matriz B?

6. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem (ou seja, do tipo $n \times n$), é verdade que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

7. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x - 3y &= -3. \end{aligned}$$

Desenhe as retas no plano XY representadas por essas equações. Qual é o ponto de intersecção dessas retas?

8. Escreva a matriz aumentada correspondente ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 7 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 &= 11 \end{aligned}$$

9. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Aplique as seguintes operações elementares sobre as linhas desse sistema:

1. Some à segunda linha -1 vezes a primeira linha.
2. Some à terceira linha -2 vezes a primeira linha.
3. Multiplique a segunda linha por $-1/2$.
4. Some à terceira linha 1 vezes a segunda linha.
5. Multiplique a terceira linha por $-1/10$.

Após fazer essas operações, resolva o sistema resultante começando pela terceira linha, passando pela segunda, e chegando à primeira.

10. As seguintes matrizes aumentadas já estão na forma escalonada. O sistema de equações lineares correspondente a cada uma dessas matrizes possui um número infinito de soluções. Essas soluções dependem de um ou mais parâmetros (variáveis livres). Escreva a solução geral do sistema associado a cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

11. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares usando o método de escalonamento:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 12x_2 + 8x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1 \\ -4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 11x_4 &= -13 \end{aligned}$$

12. Considere o sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 10 \\ -4 & -8 & 10 & 81 \end{bmatrix}$$

Quantas soluções esse sistema possui?

13. Determine condições sobre b_1, b_2 e b_3 para que o sistema a seguir possua soluções:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

14. Para quais valores de a, b, c, α e β o sistema

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \alpha \\ cx_1 + dx_2 &= \beta \end{aligned}$$

possui apenas uma solução?