Respostas da Lista de Exercícios 2

Gustavo de Oliveira

20 de setembro de 2017

1 Respostas da Lista de Exercícios 2

1.1 Determinantes e matriz inversa

http://bit.ly/gaal-2017

Exercício 1

(a)

$$A^{-1}A = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{21} - a_{12}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

```
A = matrix(QQ, [[4, 7], [1, 2]])
A
```

```
[4 7]
[1 2]
```

```
A.det()
```

```
1
```

Logo A é invertível.

```
A.inverse()
```

```
[ 2 -7]
[-1  4]
```

```
B = matrix(QQ, [[3, 4], [6, 8]])
B
```

```
[3 4]
[6 8]
```

```
B.det()
```

0

Logo B não é invertível.

```
C = matrix(QQ, [[4, -2], [2, 0]])
C
```

```
[ 4 -2]
[ 2  0]
```

```
C.det()
```

```
4
```

Logo C é invertível.

```
C.inverse()
```

```
[   0  1/2]
[-1/2    1]
```

Exercício 2

(a)

```
A = matrix(QQ, [[2, 1], [5, 3]])
A
```

```
[2 1]
[5 3]
```

```
B = matrix(QQ, [[-1], [2]])
B
```

```
[-1]
[ 2]
```

```
A.det()
```

```
1
```

```
A.inverse()
```

```
[ 3 -1]
[-5  2]
```

```
X = A.inverse()*B
X
```

```
[-5]
[ 9]
```

(b)

```
A = matrix(QQ, [[1, -1], [2, 1]])
A
```

```
[ 1 -1]
```

```
[ 2  1]
```

```
A.det()
```

```
3
```

```
A.inverse()
```

```
[ 1/3  1/3]
[-2/3  1/3]
```

```
X = A.inverse()*B
X
```

```
[1/3]
[4/3]
```

Exercício 3

Não. É possível resolver $AX = B$ por esse método apenas se A for invertível. Se A não for invertível deve-se usar o método de escalonamento.

Exercício 4

(b)

```
A = matrix(QQ, [[1, 2], [2, 6]])
A
```

```
[1 2]
[2 6]
```

```
A.inverse()
```

```
[  3  -1]
[ -1 1/2]
```

```
B1 = matrix(QQ, [[3], [5]])
B1
```

```
[3]
[5]
```

```
X = A.inverse()*B1
X
```

```
[   4]
[-1/2]
```

```
B2 = matrix(QQ, [[-1], [2]])
B2
```

```
[-1]
[ 2]
```

```
X = A.inverse()*B2
X
```

```
[-5]
[ 2]
```

```
B3 = matrix(QQ, [[2], [0]])
B3
```

```
[2]
[0]
```

```
X = A.inverse()*B3
X
```

```
[ 6]
[-2]
```

(b)

```
AB1B2B3 = matrix(QQ, [[1, 2, 3, -1, 2], [2, 6, 5, 2, 0]])
AB1B2B3
```

```
[ 1  2  3 -1  2]
[ 2  6  5  2  0]
```

```
AB1B2B3.echelon_form()
```

```
[   1    0    4   -5    6]
[   0    1 -1/2    2   -2]
```

Exercício 5

(a)

$$XA^2 = A^{-1}$$

$$XA^2A^{-2} = A^{-1}A^{-2}$$

$$XAAA^{-1}A^{-1} = A^{-3}$$

$$XAIA^{-1} = A^{-3}$$

$$XAA^{-1} = A^{-3}$$

$$XI = A^{-3}$$

$$X = A^{-3}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
AXB &= (BA)^2 \\
A^{-1}AXBB^{-1} &= A^{-1}(BA)^2B^{-1} \\
IXI &= A^{-1}(BA)^2B^{-1} \\
X &= A^{-1}(BA)^2B^{-1}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
(A^{-1}X)^{-1} &= A(B^{-2}A)^{-1} \\
((A^{-1}X)^{-1})^{-1} &= (A(B^{-2}A)^{-1})^{-1} \\
A^{-1}X &= ((B^{-2}A)^{-1})^{-1}A^{-1} \\
A^{-1}X &= B^{-2}AA^{-1} \\
A^{-1}X &= B^{-2} \\
AA^{-1}X &= AB^{-2} \\
X &= AB^{2}
\end{aligned}
$$

(d)

$$ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$$
$$A^{-1}ABXA^{-1}B^{-1} = A^{-1}(I + A)$$
$$BXA^{-1}B^{-1} = A^{-1} + I$$
$$B^{-1}BXA^{-1}B^{-1} = B^{-1}(A^{-1} + I)$$
$$XA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} + B^{-1}$$
$$XA^{-1}B^{-1}B = (B^{-1}A^{-1} + B^{-1})B$$
$$XA^{-1} = B^{-1}A^{-1}B + I$$
$$AA^{-1}A = (B^{-1}A^{-1}B + I)A$$
$$X = B^{-1}A^{-1}BA + A$$

Exercício 6

Basta verificar que $A^{-1}A = I$. De fato

$$A^{-1}A = (2I - A)A = 2IA - A^2 = 2A - A^2 - I + I = -(A^2 - 2A + I) + I = -0 + I = 0 + I = I,$$

onde usamos que $A^2 - 2A + I = 0$.

Exercícios 7

```
AI = matrix(QQ, [[-2, 4, 1, 0], [3, -1, 0, 1]])
AI
```

```
[-2  4  1  0]
[ 3 -1  0  1]
```

```
AI.echelon_form()
```

```
[   1    0 1/10  2/5]
[   0    1 3/10  1/5]
```

```
BI = matrix(QQ, [[2, 3, 0, 1, 0, 0], [1, -2, 1, 0, 1, 0], [2, 0, -1,\
    0, 0, 1]])
BI
```

```
[ 2  3  0  1  0  0]
[ 1 -2  1  0  1  0]
[ 2  0 -1  0  0  1]
```

```
BI.echelon_form()
```

```
[    1     0     0  2/13  3/13  3/13]
[    0     1     0  3/13 -2/13 -2/13]
[    0     0     1  4/13  6/13 -7/13]
```

```
CI = matrix(QQ, [[1, -2, 2, 1, 0, 0], [3, 1, 2, 0, 1, 0], [2, 3, -1,\
    0, 0, 1]])
CI
```

```
[ 1 -2  2  1  0  0]
[ 3  1  2  0  1  0]
[ 2  3 -1  0  0  1]
```

```
CI.echelon_form()
```

```
[   1    0    0    1 -4/7  6/7]
[   0    1    0   -1  5/7 -4/7]
[   0    0    1   -1    1   -1]
```

```
DI = matrix(QQ, [[1, 1, 1, 1, 0, 0], [0, 2, 3, 0, 1, 0], [5, 5, 1, \
    0, 0, 1]])
DI
```

```
[1 1 1 1 0 0]
[0 2 3 0 1 0]
[5 5 1 0 0 1]
```

```
DI.echelon_form()
```

```
[    1     0     0  13/8  -1/2  -1/8]
[    0     1     0 -15/8   1/2   3/8]
[    0     0     1   5/4     0  -1/4]
```

```
EI = matrix(QQ, [[0, -1, 1, 0, 1, 0, 0, 0], [2, 1, 0, 2, 0, 1, 0, \
    0], [2, -1, 3, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 1, -1, 0, 0, 0, 1]])
EI
```

```
[ 0 -1  1  0  1  0  0  0]
[ 2  1  0  2  0  1  0  0]
[ 2 -1  3  0  0  0  1  0]
[ 0  1  1 -1  0  0  0  1]
```

```
EI.echelon_form()
```

```
[    1     0     0     0 -11/6  -1/3   5/6  -2/3]
[    0     1     0     0   1/3   1/3  -1/3   2/3]
[    0     0     1     0   4/3   1/3  -1/3   2/3]
[    0     0     0     1   5/3   2/3  -2/3   1/3]
```

Exercício 8

```
A = matrix(QQ, [[-1, 2], [2, 3]])
A
```

```
[-1  2]
```

[2 3]

```
A.det()
```
-7

Logo A é invertível.

```
B = matrix(QQ, [[-3, 2], [-3, 2]])
B
```
[-3 2]
[-3 2]

```
B.det()
```
0

Logo B não é invertível.

Exercício 9

```
A = matrix(QQ, [[1, 2, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2]])
A
```
[1 2 3]
[2 3 1]
[3 1 2]

Usando expansão pela primeira linha:

```
1*(-1)^(1+1)*matrix([[3, 1], [1, 2]]).det() + 2*(-1)^(1+2)*matrix\
    ([[2, 1], [3, 2]]).det() + 3*(-1)^(1+3)*matrix([[2, 3], [3, 1]]).\
    det()
```
-18

```
A.det()
```
-18

```
B = matrix(QQ, [[1, 0, 3], [5, 1, 1], [0, 1, 2]])
B
```
[1 0 3]
[5 1 1]
[0 1 2]

Usando expansão pela primeira linha:

```
1*(-1)^(1+1)*matrix([[1, 1], [1, 2]]).det() + 3*(-1)^(1+3)*matrix\
    ([[5, 1], [0, 1]]).det()
```
16

```
B.det()
```
16

```
C = matrix(QQ, [[1, -1, -0, 3], [2, 5, 2, 6], [0, 1, 0, 0], [1, 4, \
    2, 1]])
C
```

```
[ 1 -1  0  3]
[ 2  5  2  6]
[ 0  1  0  0]
[ 1  4  2  1]
```

Usando expansão pela terceira linha:

```
1*(-1)^(3+2)*matrix([[1, 0, 3], [2, 2, 6], [1, 2, 1]]).det()
```

```
4
```

```
C.det()
```

```
4
```

```
D = matrix(QQ, [[2, 0, 3, -1], [1, 0, 2, 2], [0, -1, 1, 4], [2, 0, \
    1, 3]])
D
```

```
[ 2  0  3 -1]
[ 1  0  2  2]
[ 0 -1  1  4]
[ 2  0  1  3]
```

Usando expansão pela segunda coluna:

```
-1*(-1)^(3+2)*matrix([[2, 3, -1], [1, 2, 2], [2, 1, 3]]).det()
```

```
14
```

```
D.det()
```

```
14
```

Exercício 10

Observamos que $\det(A) = \frac{1}{2}\det(A_2)$ onde $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz obtida multiplicando a terceira linha de A por $1/2$. Como A_2 possui duas linhas iguais, temos que $\det(A_2) = 0$. Logo $\det(A) = 0$.

Como B é triangular, temos que $\det(B) = 3 \cdot (-2) \cdot 4 = -24$.

Expandindo sempre pela primeira linha observa-se que $\det(C)$ é dado pelo produto das entradas da diagonal invertida, ou seja, $\det(C) = 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$.

Trocando linhas da matriz obtemos que $\det(D) = (-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = -24$.

Expandindo sempre pela primeira linha observa-se que $\det(E)$ é dado pelo produto das entradas da diagonal invertida, ou seja, $\det(E) = a \cdot c \cdot d \cdot g = acdg$.

Exercício 11

Fornecemos apenas as respostas de $\det(B)$ e $\det(D)$:

Fazendo as operações sobre linhas $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ obtemos

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Logo $\det(B_2) = 1 \cdot 1 \cdot 16 = 16$. Portanto $\det(B) = \det(B_1) = \det(B_2) = 16$.

Fazendo as operações sobre linhas $L_1 \leftarrow (1/2)L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$ e $L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3$ obtemos

$$D_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Logo $\det(D_5) = 1 \cdot (-1) \cdot (1/2) \cdot 14 = -7$. Portanto $\det(D) = 2\det(D_1) = 2\det(D_2) = 2\det(D_3) = -2\det(D_4) = -2\det(D_5) = -2 \cdot (-7) = 14$.

Exercício 12

Calculando a expansão de cofatores pela primeira coluna obtemos

$$\begin{aligned}
\det(A) &= k[\mathrm{cof}(A)]_{11} + k[\mathrm{cof}(A)]_{31} \\
&= k(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ -8 & k-1 \end{vmatrix} + k(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -k & 3 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= k(k^2 - 1 + 8 - k - 3k - 3) \\
&= k(k^2 - 4k + 4) \\
&= k(k-2)^2.
\end{aligned}$$

Logo $\det(A) \neq 0$ se $k \neq 0$ e $k \neq 2$. Portanto A é invertível se $k \neq 0$ e $k \neq 2$.

Exercício 13

(a) -6 (b) 9 (c) -3/2 (d) $3 \cdot 2^n$ (e) $-2 \cdot 3^n$ (f) 9.

Exercício 14

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(AB) = \frac{1}{\det(B)}\det(A)\det(B) = \det(A).$$