Respostas da Lista de Exercícios 3

Gustavo de Oliveira

19 de outubro de 2017

1 Respostas da Lista de Exercícios 3

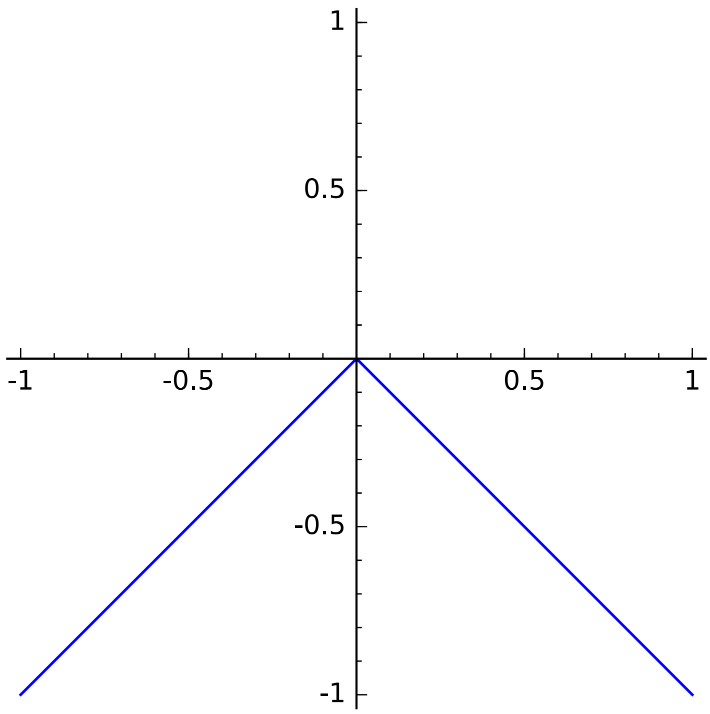
1.1 Vetores

http://bit.ly/gaal-2017

Exercício 1

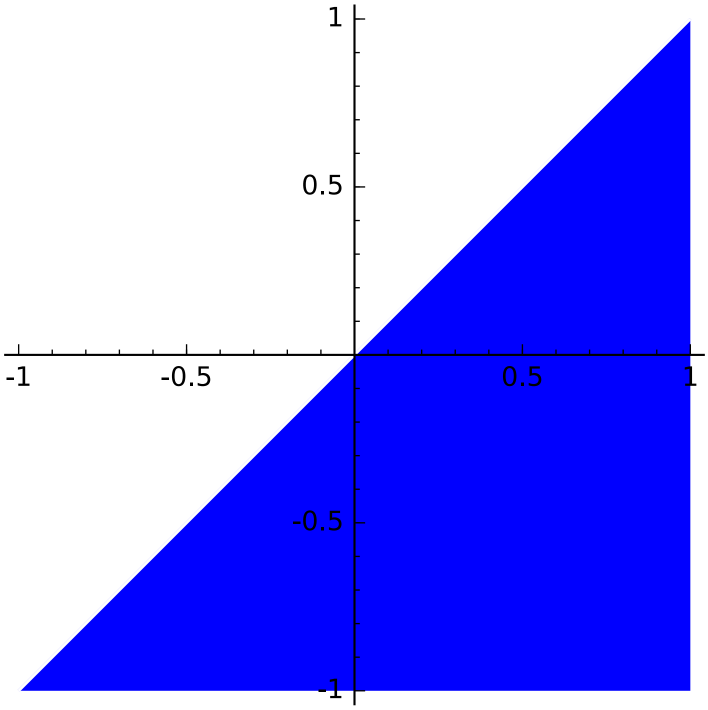
(a)

```
plot(-abs(x), ymax=1, aspect_ratio=1)
```



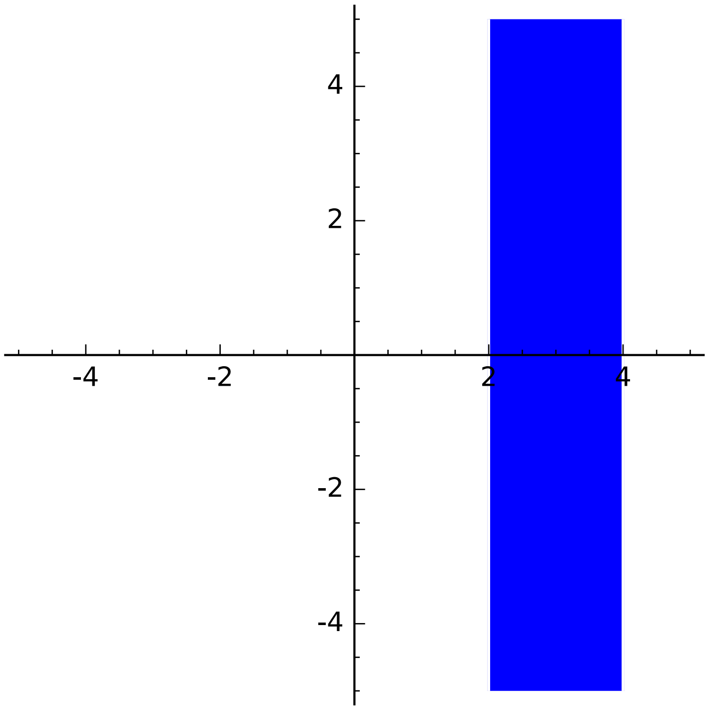
(b)

```
y = var('y')
region_plot(x - y > 0, (x, -1, 1), (y, -1, 1), aspect_ratio=1)
```



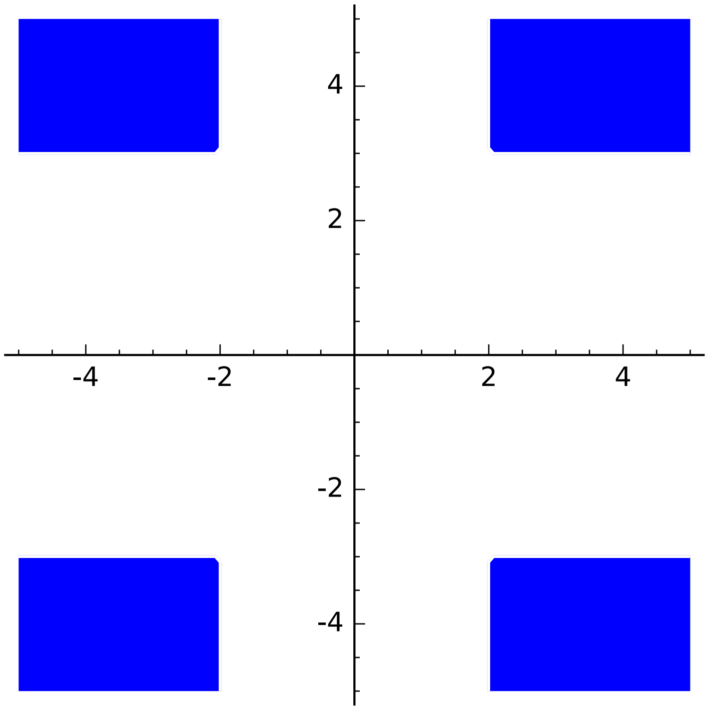
(c)

```
y = var('y')
region_plot(abs(x - 3) < 1, (x, -5, 5), (y, -5, 5), aspect_ratio=1)
```



(d)

```
y = var('y')
region_plot([abs(x) > 2, abs(y) > 3], (x, -5, 5), (y, -5, 5), \
    aspect_ratio=1)
```



Exercício 2

```
A = (-1, 2)
B = (3, 4)
C = (2, -1)
O = (0, 0)
AB = (B[0] - A[0], B[1] - A[1])
P = (C[0] + AB[0], C[1] + AB[1])
```

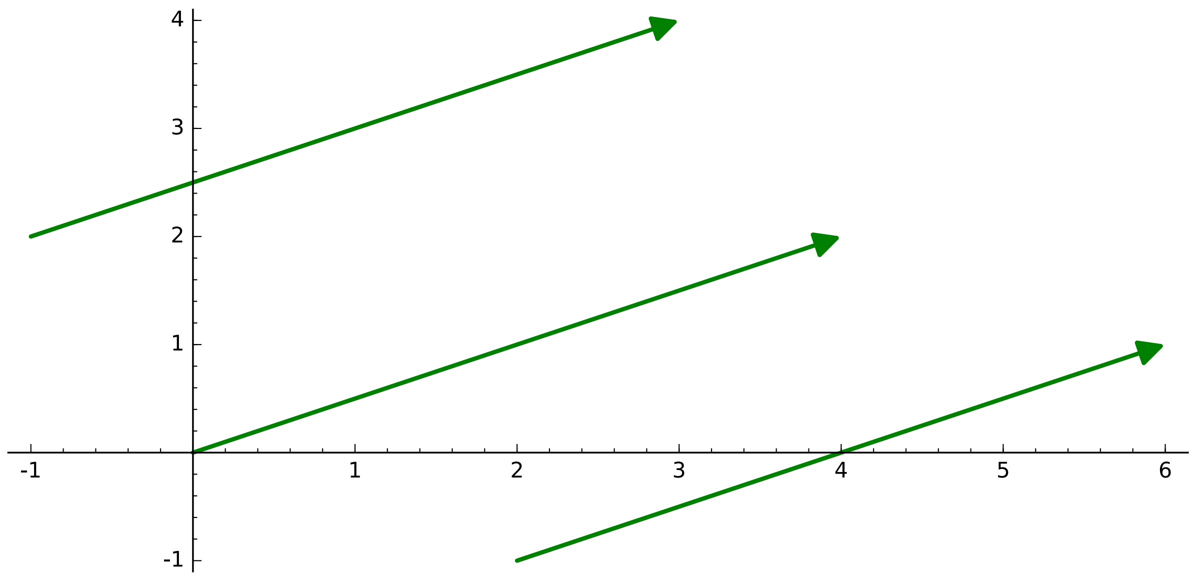
```
AB
```

(4, 2)

```
P
```

(6, 1)

```
p = arrow(A, B, color='green') + arrow(O, AB, color='green') + arrow\
    (C, P, color='green')
show(p)
```



Exercício 3

Temos $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. Logo $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} = 2(1,0) - (0,-2) = (2,0) + (0,2) = (2,2)$. Portanto $C = (2,2)$.

Exercício 4

```
U = vector([3, -1])
U
```

(3, -1)

```
V = vector([1, 4])
```

```
V
```

(1, 4)

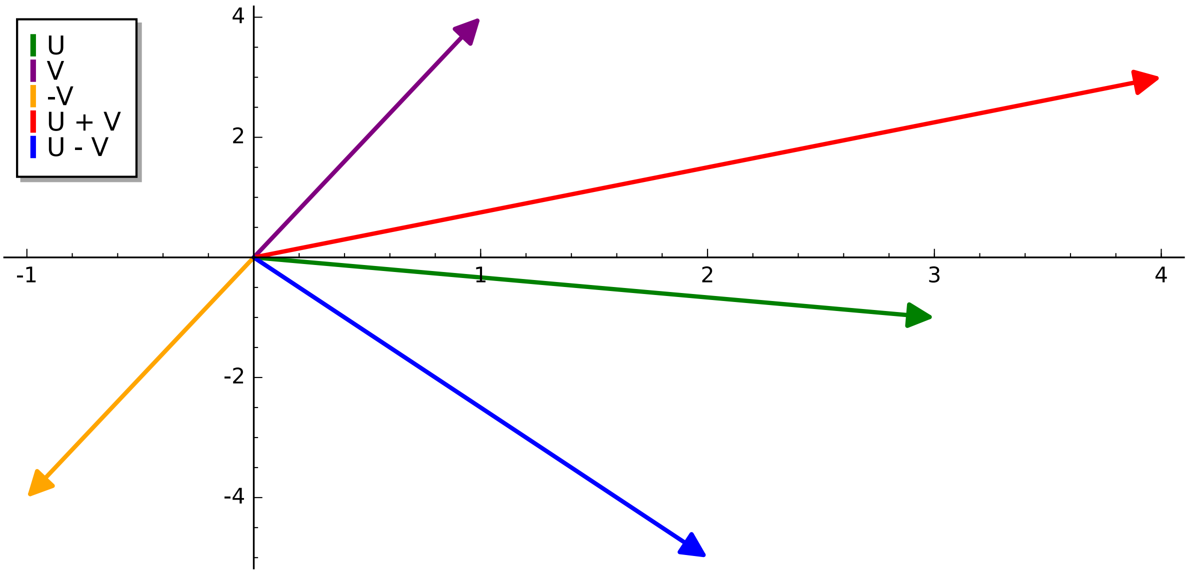
```
U + V
```

(4, 3)

```
U - V
```

(2, -5)

```
p1 = arrow((0,0), (3,-1), color='green', legend_label='U', \
    legend_color='black')
p2 = arrow((0,0), (1,4), color='purple', legend_label='V', \
    legend_color='black')
p3 = arrow((0,0), (-1,-4), color='orange', legend_label='-V', \
    legend_color='black')
p4 = arrow((0,0), (4,3), color='red', legend_label='U + V', \
    legend_color='black')
p5 = arrow((0,0), (2,-5), color='blue', legend_label='U - V', \
    legend_color='black')
show(p1 + p2 + p3 + p4 + p5)
```



Exercício 5

```
V = vector([-2, 4])
V
```

(-2, 4)

```
2*V
```

(-4, 8)

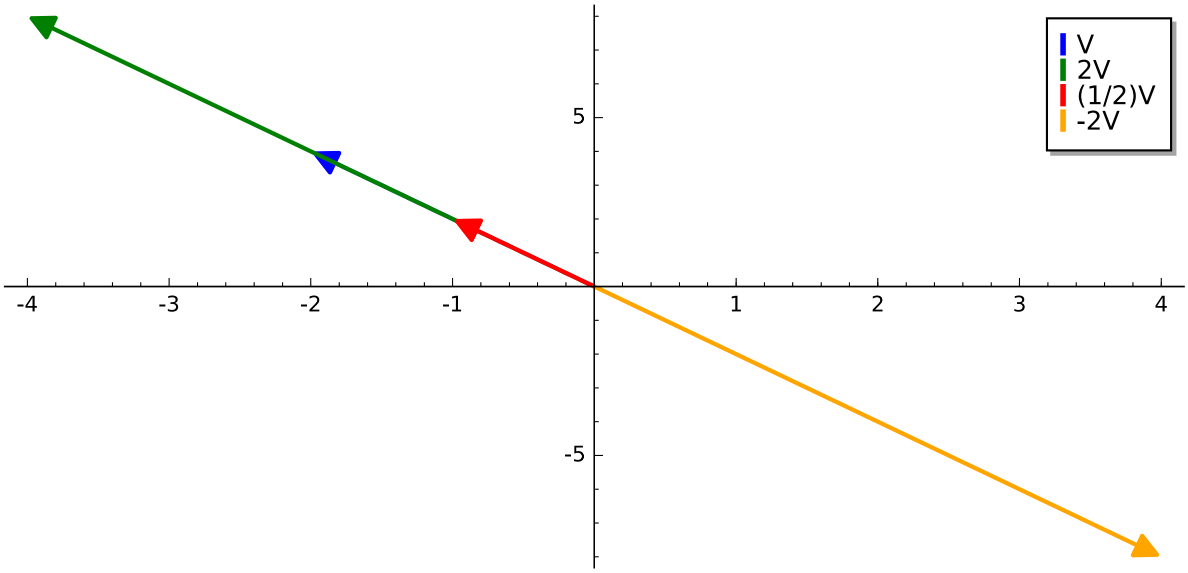
```
(1/2)*V
```

(-1, 2)

```
-2*V
```

(4, -8)

```
p1 = arrow((0,0), tuple(V), color='blue', legend_label='V', \
    legend_color='black')
p2 = arrow((0,0), tuple(2*V), color='green', legend_label='2V', \
    legend_color='black')
p3 = arrow((0,0), tuple((1/2)*V), color='red', legend_label='(1/2)V'\
    , legend_color='black')
p4 = arrow((0,0), tuple(-2*V), color='orange', legend_label='-2V', \
    legend_color='black')
p = p1 + p2 + p3 + p4
show(p)
```



Exercício 6

$$5X - A = 2(A + 2X)$$
$$5X - A = 2A + 4X$$
$$5X - 4X = 2A + A$$
$$X = 3A$$

Exercício 7

```
U = vector([6, -4, -2])
```

```
V = vector([-9, 6, 3])
W = vector([15, -10, 5])
```

```
U[0]/V[0]
U[1]/V[1]
U[2]/V[2]
```

```
-2/3
-2/3
-2/3
```

Logo U e V são colineares.

```
U[0]/W[0]
U[1]/W[1]
U[2]/W[2]
```

```
2/5
2/5
-2/5
```

Logo U e W não são colineares.

```
V[0]/W[0]
V[1]/W[1]
V[2]/W[2]
```

```
-3/5
-3/5
3/5
```

Logo V e W não são colineares.

Exercício 8

A distância entre P e P' é dada por $\|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2}$.

A equação para as coordenadas do ponto cuja distância ao ponto P' é igual a 2 é

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2} = 2,$$

ou seja,

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4.$$

Exercício 9

```
U = vector([1, 2, -3])
V = vector([-3, 5, 2])
```

```
U.dot_product(V)
```

```
1
```

```
U.norm()
```
sqrt(14)

```
V.norm()
```
sqrt(38)

```
arccos(U.dot_product(V)/(U.norm()*V.norm())).n()
```
1.52742723426717

```
U/U.norm()
```
(1/14*sqrt(14), 1/7*sqrt(14), -3/14*sqrt(14))

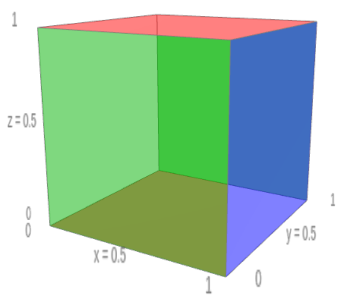
Exercício 10

As dimensões do cubo não importam. Logo, consideramos um cubo com lados de comprimento 1 e centro no ponto $(1/2, 1/2, 1/2)$ (veja a figura a seguir). Tomamos as diagonais representadas pelos vetores $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$. O ângulo θ entre esses vetores satisfaz

$$\cos\theta = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto $\theta = \pi/3$.

```
cube(center=(1/2, 1/2, 1/2), color=['red', 'green', 'blue'], opacity\
    =0.5)
```



Exercício 11

Calculamos $V \cdot W = (x, 3, 4) \cdot (3, 1, 2) = 3x + 3 + 8 = 3x + 11$. Resolvendo a equação $V \cdot W = 0$ para x, obtemos $x = -11/3$. Portanto V e W são ortogonais se $x = -11/3$.

Exercício 12

Calculamos $V \cdot W = (x, 2, 6) \cdot (x, -2, 3) = x^2 - 4 + 18 = x^2 + 14$. Observamos que a equação $V \cdot W = 0$ na variável x, ou seja, $x^2 + 14 = 0$, não tem solução. Portanto não existe x tal que V e W são ortogonais.

Exercício 13

Primeiramente, vamos obter um vetor V que seja ortogonal ao vetor $N = (2, 3)$. Seja $W = (a, b)$. Calculamos $W \cdot N = (x, y) \cdot (2, 3) = 2a + 3b$. Logo $W \cdot N = 0$ se e somente se $2a + 3b = 0$, ou seja, $a = -(3/2)b$. Se $b = 2$, então $a = -3$. Portanto $V = (-3, 2)$ é ortogonal a N. A equação da reta com vetor diretor V que passa pelo ponto $P_0 = (-1, 1)$ é dada por $(x, y) = (-1, 1) + \lambda(-3, 2)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 14

Denotamos por PVU a projeção de V sobre U.

```
V = vector([-1, 3])
U = vector([2, 1])
PVU = (U.dot_product(V)/U.norm()^2)*U
PVU
```

(2/5, 1/5)

```
V = vector([1, 2, 3])
U = vector([1/2, 1/2, 1/sqrt(2)])
PVU = (U.dot_product(V)/U.norm()^2)*U
PVU
```

(3/4*sqrt(2) + 3/4, 3/4*sqrt(2) + 3/4, 3/4*sqrt(2)*(sqrt(2) + 1))

```
V = vector([1, 2, 3])
U = vector([0, 0, 1])
PVU = (U.dot_product(V)/U.norm()^2)*U
PVU
```

(0, 0, 3)

Exercício 15

```
U = vector([0, 1, 1])
V = vector([3, -1, 2])
print(U.cross_product(V))
```

(3, 3, -3)

```
U = vector([3, -1, 2])
V = vector([0, 1, 1])
print(U.cross_product(V))
```

(-3, -3, 3)

```
U = vector([-1, 2, 3])
V = vector([2, -4, -6])
print(U.cross_product(V))
```

(0, 0, 0)

```
U = vector([1, 1, 1])
V = vector([1, 2, 3])
print(U.cross_product(V))
```

(1, -2, 1)

Exercício 16

```
E1 = vector([1, 0, 0])
E2 = vector([0, 1, 0])
E3 = vector([0, 0, 1])
```

```
E1.cross_product(E2) == E3
```
True

```
E2.cross_product(E3) == E1
```
True

```
E3.cross_product(E1) == E2
```
True

Exercício 17

Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $V = (v_1, v_2, v_3)$. Vamos mostrar que $(U \times V) \cdot U = 0$ e $(U \times V) \cdot V = 0$. O produto misto $(X \times Y) \cdot Z$ é dado pelo determinante da matrix cujas linhas são as coordenadas de X, Y e Z, respectivamente. Como o determinante de uma matriz que tem duas linhas iguais é igual zero, concluímos que $(U \times V) \cdot U = 0$ e $(U \times V) \cdot V = 0$. Isso demonstra que $U \times V$ é ortogonal a U e a V.

Exercício 18

$$X = (-1, 2, 1)$$

Exercício 19

Primeiro vamos mostrar que os pontos A, B, C e D pertencem ao mesmo plano. Isso ocorre se e somente se o produto misto de $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ é igual a zero. Calculamos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 4)$ e $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, 2)$. Logo

```
AB = vector([1, 1, 2])
AC = vector([-1, 2, 4])
AD = vector([-2, 1, 2])
(AB.cross_product(AC)).dot_product(AD)
```
0

$$\text{ou seja } (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

Agora vamos mostrar que os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. Calculamos $\overrightarrow{DC} = (1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{BC} = (-2, 1, 2)$. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, concluímos que $ABCD$ é um paralelogramo. A área desse paralelogramo é dada por $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|$, ou seja,

```
AB = vector([1, 1, 2])
```

```
AD = vector([-2, 1, 2])
AB.cross_product(AD).norm()
```
3*sqrt(5)

Exercício 20

Primeiro calculamos a projeção de $\overrightarrow{CA}$ sobre $\overrightarrow{CB}$, a qual denotamos por P. Como $\overrightarrow{CA} = (-1, 3, -1)$ e $\overrightarrow{CB} = (-3, 2, 1)$, temos

```
CA = vector([-1, 3, -1])
CB = vector([-3, 2, 1])
P = (CA.dot_product(CB)/CB.norm()^2)*CB
P
```
(-12/7, 8/7, 4/7)

Observamos que $\|P\|^2 + h^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2$, onde h é a altura relativa ao lado BC. Logo $h = \sqrt{\|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|P\|^2}$, ou seja,

```
h = sqrt(CA.norm()^2 - P.norm()^2)
h
```
3*sqrt(5/7)

Exercício 21

(a)

Observamos que $U - \alpha V$ é ortogonal a V se e somente se $(U - \alpha V) \cdot V = 0$. Logo $0 = U \cdot V - \alpha V \cdot V = U \cdot V - \alpha \|V\|^2$. Resolvendo essa equação para α, obtemos $\alpha = U \cdot V / \|V\|^2$.

(b)

Calculamos $(U+V)\times(U-V) = U\times U - U\times V + V\times U - V\times V = -U\times V + V\times U = V\times U + V\times U = 2V\times U$, onde usamos as propriedades $U \times U = 0$, $V \times V = 0$ e $U \times V = -V \times U$.

Exercício 22

Fixamos o ponto B e calculamos os vetores BA, BC e BD. Logo os pontos A, B, C e D pertencem ao mesmo plano se e somente se o produto misto de BD, BC e BA é igual a zero, ou seja,

```
matrix([[x-2, 3, 5], [3, 1, 4], [1, 0, 1]]).det() == 0
```
x - 4 == 0

Isso ocorre se e somente se x = 4.