Lista de Exercícios 5
Espaços $\mathbb{R}^n$

MAT 038 – GAAL

1. Em cada um dos casos a seguir, determine se o vetor X é combinação linear dos vetores $V_1 = (5, -3, 1)$, $V_2 = (0, 4, 3)$ e $V_3 = (-10, 18, 7)$. Se a resposta for afirmativa, determine a combinação linear.

(a) $X = (10, -2, 5)$.

(b) $X = (-2, -1, 1)$.

2. Em cada um dos casos a seguir, determine se o conjunto de vetores é linearmente dependente (LD) ou linearmente independente (LI).

(a) $\{(1, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 6, 12)\}$.

(b) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$.

3. Para quais valores de λ o conjunto de vetores $\{(3, 1, 0), (\lambda^2 + 2, 2, 0)\}$ é linearmente dependente?

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine os valores de λ tais que o sistema $AX = \lambda X$ tem solução diferente de zero. Para esses valores de λ, determine uma base para o espaço solução.

5. Sejam $V_1 = (4, 2, -3)$, $V_2 = (2, 1, -2)$ e $V_3 = (-2, -1, 0)$.

(a) Prove que V_1, V_2 e V_3 são linearmente dependentes.

(b) Prove que V_1 e V_2 são linearmente independentes.

(c) Qual é a dimensão do subespaço gerado por V_1, V_2 e V_3?

(d) Descreva geometricamente o subespaço gerado por V_1, V_2 e V_3.

6. Sejam $V_1 = (2, 1, 3)$ e $V_2 = (2, 6, 4)$.

(a) O conjunto $\{V_1, V_2\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

(b) Determine um vetor V_3 que juntamente com V_1 e V_3 forme uma base para $\mathbb{R}^3$.

7. Use o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para determinar uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ que tem como base o conjunto $\{(1, 1, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 0, 0, 1)\}$.

8. Em cada um dos casos a seguir, determine as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$.

(a) $P = (1, 3)$ e $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$.

(b) $P = (2, -1, 3)$ e $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$.

9. Sejam S_1 e S_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que $S_1 \neq S_2$, $S_1 \subset S_2$ e S_1 e S_2 possuem um número finito de elementos. Suponha que S_2 é linearmente dependente.

(a) S_1 pode ser linearmente dependente? Em caso afirmativo, forneça um exemplo de conjuntos S_1 e S_2 dessa forma para alguma escolha de n.

(b) S_1 pode ser linearmente independente? Em caso afirmativo, forneça um exemplo de conjuntos S_1 e S_2 dessa forma para alguma escolha de n.

10. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores de λ para os quais o sistema homogêneo $(A - \lambda I_3)X = 0$ possui soluções diferente de zero. Para cada um desses valores de λ, encontre uma base ortonormal para o conjunto solução do sistema homogêneo.

11. Considere o vetor $U_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

(a) Escolha U_2 de forma que $\mathcal{B} = \{U_1, U_2\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Prove que $\mathcal{B}$ é uma base.

(b) Considere o vetor $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{3}, 3)$. Escreva $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

(c) Determine $[P]_{\{O,\mathcal{B}\}}$, ou seja, determine as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\{O, \mathcal{B}\}$.