Respostas da Lista de Exercícios 6

Gustavo de Oliveira

13 de novembro de 2017

1 Respostas da Lista de Exercícios 6

1.1 Bases e Diagonalização

http://bit.ly/gaal-2017

Exercício 1

(a)

Os vetores V_1 e V_2 são linearmente independentes. A única combinação linear de V_1 e V_2 que é igual ao vetor zero é $0V_1 + 0V_2$. Para obter essa conclusão basta resolver o sistema $c_1V_1 + c_2V_2 = 0$ para c_1 e c_2.

(b)

Sim, V_1, V_2 formam uma base para o espaço gerado por V_1 e V_2, isto é, $\text{gen}(V_1, V_2)$.

(c)

O espaço gerado por V_1 e V_2, denotado por $\text{gen}(V_1, V_2)$, é o conjunto de todas as combinações lineares de V_1 e V_2. Geometricamente, $\text{gen}(V_1, V_2)$ corresponde a um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

(d)

A dimensão de $S = \text{gen}(V_1, V_2)$ é igual a 2 pois a base de S contém dois vetores.

(e)

Qualquer vetor V_3 da forma $V_3 = (a, b, c)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ juntamente com V_1 e V_2 forma uma base de $\mathbb{R}^3$. Em outras palavras, $\{V_1, V_2, V_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se V_3 for não nulo e não paralelo ao plano definido por V_1 e V_2.

Exercício 2

Seja A a matrix cujas colunas são os vetores V_1, V_2 e V_3:

```
A = matrix(QQ, [[1, 1, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 1]])
A
```

```
[1 1 1]
[0 1 1]
[0 0 1]
```

Vamos resolver o sistema $AX = 0$ onde X é o vetor coluna com entradas c_1, c_2 e c_3. A matrix aumentada desse sistema é

```
Aum = matrix(QQ, [[1, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 1, 0]])
Aum
```

```
[1 1 1 0]
[0 1 1 0]
[0 0 1 0]
```

Escalonando essa matriz obtemos

```
Aum.echelon_form()
```

```
[1 0 0 0]
[0 1 0 0]
[0 0 1 0]
```

Logo a única solução do sistema é $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0$. Portando os vetores V_1, V_2, V_3 são linearmente independentes.

Seja B a matriz cujas colunas são os vetores V_1, V_2, V_3 e V_4:

```
B = matrix(QQ, [[1, 1, 1, 2], [0, 1, 1, 3], [0, 0, 1, 4]])
B
```

```
[1 1 1 2]
[0 1 1 3]
[0 0 1 4]
```

Vamos resolver o sistema $BX = 0$ onde X é o vetor coluna com entradas c_1, c_2, c_3 e c_4. A matrix aumentada desse sistema é

```
Baum = matrix(QQ, [[1, 1, 1, 2, 0], [0, 1, 1, 3, 0], [0, 0, 1, 4, \
    0]])
Baum
```

```
[1 1 1 2 0]
[0 1 1 3 0]
[0 0 1 4 0]
```

Escalonando essa matriz obtemos

```
Baum.echelon_form()
```

```
[ 1  0  0 -1  0]
[ 0  1  0 -1  0]
[ 0  0  1  4  0]
```

Logo o sistema possui um número infinito de soluções. Portanto os vetores V_1, V_2, V_3, V_4 são linearmente dependentes.

Exercício 4

(a)

O subespaço é definido pelas equações $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ e $x_3 = x_4$. A matrix aumentada desse sistema é

```
Aum = matrix(QQ, [[1, -1, 0, 0, 0], [0, 1, -1, 0, 0], [0, 0, 1, -1, \
    0]])
Aum
```

```
[ 1 -1  0  0  0]
[ 0  1 -1  0  0]
[ 0  0  1 -1  0]
```

Escalonando essa matriz obtemos

```
Aum.echelon_form()
```

```
[ 1  0  0 -1  0]
[ 0  1  0 -1  0]
[ 0  0  1 -1  0]
```

Logo a solução desse sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer valor de t. Seja S o subespaço formado por todos esses vetores. Seja $V = (1,1,1,1)$. Observamos que V gera o subespaço S e que $\{V\}$ é linearmente independente. Portanto $\{V\}$ é uma base de S.

(b)

O subespaço é definido pela equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

As soluções desse sistema são

```
x1, x2, x3, x4 = var('x1 x2 x3 x4')
solve([x1 + x2 + x3 + x4 == 0], [x1, x2, x3, x4])
```

```
[[x1 == -r1 - r2 - r3, x2 == r3, x3 == r2, x4 == r1]]
```

ou seja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para quaisquer valores de r_1, r_2 e r_3.

Seja S o subespaço formado por todos esses vetores. Sejam $V_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $V_2 = (-1, 0, 1, 0)$ e $V_3 = (-1, 1, 0, 0)$. Observamos que V_1, V_2, V_3 geram o espaço S. Agora vamos verificar que esses três vetores são linearmente independentes.

```
c1, c2, c3 = var('c1 c2 c3')
solve([-c1 -c2 -c3 == 0, c3 == 0, c2 == 0, c1 == 0], [c1, c2, c3])
```

[[c1 == 0, c2 == 0, c3 == 0]]

De fato eles são independentes. Portanto V_1, V_2, V_3 formam uma base para S.

(c)

O subespaço é definido pelas equações $x_1 + x_2 = 0$ e $x_1 + x_3 + x_4 = 0$.

As soluções desse sistema são

```
solve([x1 + x2 == 0, x1 + x3 + x4 == 0], [x1, x2, x3, x4])
```

[[x1 == -r4 - r5, x2 == r4 + r5, x3 == r5, x4 == r4]]

ou seja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = r_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + r_7 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para quaisquer valores de r_6 e r_7.

Seja S o subespaço formado por todos esses vetores. Sejam $V_1 = (-1, 1, 0, 1)$ e $V_2 = (-1, 1, 1, 0)$. Observamos que V_1, V_2 geram o espaço S. Agora vamos verificar que esses três vetores são linearmente independentes.

```
solve([-c1-c2 == 0, c1 + c2 == 0, c2 == 0, c1 == 0], [c1, c2])
```

[[c1 == 0, c2 == 0]]

De fato eles são independentes. Portanto V_1, V_2 formam uma base para S.

Exercício 4

(a) Esses vetores podem não gerar R .

(b) Esses podem ser linearmente independentes.
(c) Quaisquer quatro desses vetores podem ser uma base para R .