Prova 1

MAT 038 - GAAL - Turma A
http://bit.ly/gaal-2017

14 de setembro de 2017

Justifique suas respostas.

1. (10 pontos) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3. \end{aligned}$$

2. (6 pontos) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Para quais valores de a e b, respectivamente, o sistema $AX = B$ não possui solução, possui apenas uma solução, possui um número infinito de soluções?

3. (7 pontos) Calcule o determinante da matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. (10 pontos) Determine, se existir, a inversa da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução

1. Escrevemos a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$. Obtemos a matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema correspondente é

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ y - z &= 1. \end{aligned}$$

As variáveis dependentes são w e y, e as variáveis livres são x e z. Resolvendo de trás para frente para as variáveis dependentes em função das livres, obtemos $y = 1 + z$ e $w = 2 + x - z$. Usando os parâmetros s e t, podemos exprimir as soluções como

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

2. Escrevemos a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & b \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_1 \leftarrow (1/2)L_1$ e $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$. Obtemos a matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b/2 \\ 0 & a-4 & -2b \end{bmatrix}.$$

Temos as seguintes possibilidades para o sistema de equações correspondente:

1. Nenhuma solução: $a - 4 = 0$ e $-2b \neq 0$, ou seja, $a = 4$ e $b \neq 0$.
2. Apenas uma solução: $a - 4 \neq 0$, ou seja, $a \neq 4$.
3. Um número infinito de soluções: $a - 4 = 0$ e $-2b = 0$, ou seja, $a = 4$ e $b = 0$.

3. Expandindo pela terceira linha, obtemos

$$\det(B) = (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

4. Escrevemos a matrix:

$$[C|I] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, $L_2 \leftarrow (1/3)L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, $L_3 \leftarrow (-1/3)L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$, $L_1 = L_1 - (7/3)L_3$ e $L_2 \leftarrow L_2 - (2/3)L_3$. Obtemos a matriz escalonada reduzida:

$$[I|C^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 0 & 1 & 0 & -8/9 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ -8/9 & 1/9 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$