Prova 1

MAT 038 - GAAL - Turma B
http://bit.ly/gaal-2017

14 de setembro de 2017

Justifique suas respostas.

1. (10 pontos) Determine condições sobre as constantes a, b e c para que o sistema a seguir não seja impossível:

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= a \\ 4x - 5y + 8z &= b \\ -3x + 3y - 3z &= c. \end{aligned}$$

Nesse caso (sob essas condições), determine todas as soluções do sistema para $a = 1$ e $b = 1$.

2. (7 pontos) Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (10 pontos) Calcule, se existir, a inversa da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ache todas as soluções do sistema $CX = D$ onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. (6 pontos) Em cada um dos items abaixo, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   (a) Se A é invertível e B não é invertível, então AB não é invertível.

   (b) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

   (c) Se $\det(B) = 7$ e B foi obtida de A pelas operações elementares $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$, $L_3 \leftarrow (-1)L_3$, então $\det(A) = -7$.

Solução

1. Escrevemos a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & a \\ 4 & -5 & 8 & b \\ -3 & 3 & -3 & c \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. Obtemos a matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & a \\ 0 & 3 & -12 & -4a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a+b+c \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações correspondente é impossível se e somente se $-a+b+c=0$.

Sob a condição obtida, para $a=1$ e $b=1$ temos $c=a-b=1-1=0$. Logo a matriz escalonada correspondente é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & a \\ 0 & 3 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema de equações associado é

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 0 \\ 3y - 12z &= 0. \end{aligned}$$

As variáveis dependentes são x e y, e a variável livre é z. Resolvendo de trás para frente para as variáveis dependentes em função das livres obtemos $y = -1 + 4z$ e $x = -1 + 3z$. Usando o parâmetro t, exprimimos as soluções pela expressão

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

2. Expandindo pela terceira linha, obtemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Expandindo pela primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Escrevemos a matriz

$$[C|I] = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_1 \leftarrow (1/8)L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $L_3 \leftarrow (1/2)L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - (1/2)L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - (1/4)L_3$. Obtemos a matriz escalonada reduzida

$$[I|C^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/8 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/4 & -1/8 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Como C é invertível, o sistema $CX = D$ tem uma única solução dada por

$$X = C^{-1}D = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/4 & -1/8 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Verdadeira. Se A é invertível e B não é invertível, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) = 0$. Logo $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$. Isso implica que AB não é invertível pois AB não é invertível se e somente se $\det(AB) = 0$.

(b) Falsa. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Todavia $AB = 0$.

(c) Falsa. Considere a matriz A. Efetuando a operação $L_1 \leftrightarrow L_2$ obtemos a matriz A_1 com $\det(A_1) = -\det(A)$. Efetuando a operação $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$ obtemos a matriz A_2 com $\det(A_2) = \det(A_1)$. Efetuando a operação $L_3 \leftarrow (-1)L_3$ obtemos a matriz B com $\det(B) = (-1)\det(A_2)$. Portanto $\det(A) = -\det(A_1) = -\det(A_2) = -(-\det(B)) = \det(B) = 7$.