Prova 1

MAT 038 - GAAL - Turma N
http://bit.ly/gaal-2017

14 de setembro de 2017

Justifique suas respostas.

1. (17 pontos) Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

   Calcule o determinante de A. Calcule a inversa de A. Calcule as soluções do sistema $AX = B$.

2. (10 pontos) Para quais valores de a, respectivamente, o sistema a seguir não possui solução, possui apenas uma solução, possui um número infinito de soluções?

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 2 \\ -x - y + a^2 z &= -a \end{aligned}$$

   Para os valores de a para os quais o sistema possui um número infinito de soluções, determine todas as soluções do sistema.

3. (6 pontos) Em cada um dos items abaixo, indique se a afirmação é verdadeira ou false e justifique sua resposta.

   (a) Se $A^2 = 0$, então o sistema $AX = 0$ tem um número infinito de soluções.

   (b) Para qualquer matriz A quadrada, temos $\det(2A) = 2\det(A)$.

   (c) Se $A = B^T DB$ onde D é uma matriz diagonal e B é uma matriz qualquer, então $A^T = A$.

Solução

1. Usando expansão pela quarta linha, obtemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Escrevemos a matriz

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $L_2 \leftarrow (-1)L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, $L_3 \leftarrow (1/4)L_3$, $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3$, $L_4 \leftarrow 4L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 + (1/4)L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. Obtemos a matriz escalonada reduzida

$$[I|A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como A é invertível, o sistema $AX = B$ possui uma única solução dada por

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

2. Consideramos a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & a^2 & -a \end{bmatrix}.$$

Efetuamos as operações $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Obtemos a matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & 1 - a \end{bmatrix}.$$

Temos as seguintes possibilidades para o sistema de equações correspondente:

1. Nenhuma solução: $a^2 - 1 = 0$ e $1 - a = 0$, ou seja, $a = \pm 1$ e $a \neq 1$, ou seja, $a = -1$.
2. Apenas uma solução: $a^2 - 1 \neq 0$, ou seja, $a \neq \pm 1$.
3. Um número infinito de soluções: $a^2 - 1 = 0$ e $1 - a = 0$, ou seja, $a = \pm 1$ e $a = 1$, ou seja, $a = 1$.

Para $a = 1$, obtemos a matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema correspondente é

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2y + z3. \end{aligned}$$

As variáveis dependentes são x e y, e a variável livre é z. Resolvendo o sistema de trás para frente para as variáveis dependentes em função das variáveis livres, obtemos $y = 3/2 - (1/2)z$ e $x = -1/2 + (3/2)z$. Usando o parâmetro t, podemos exprimir as soluções como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

3. (a) Verdadeira. Se $A^2 = 0$, então $\det(A^2) = 0$. Mas $\det(A^2) = \det(A)\det(A) = \det(A)^2$. Logo $\det(A) = 0$. Portanto A não é invertível. Observamos que $AX = 0$ tem solução única se e somente se A é invertível. Além disso, o sistema $AX = 0$ nunca é impossível. Portanto $AX = 0$ tem um número infinito de soluções.

(b) Falsa. A relação correta é $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ onde A é uma matriz $n \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Verdadeira. De fato

$$A^T = (B^T D B)^T = (DB)^T (B^T)^T = B^T D^T B = B^T D B = A,$$

onde usamos que $D^T = D$ pois D é diagonal.