Prova 2

MAT 038 - GAAL - Turma A
http://bit.ly/gaal-2017

24 de outubro de 2017

Justifique suas respostas.

1. (3 pontos para cada item) Para $x \in \mathbb{R}$, considere os pontos $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, 3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$.

   (a) Determine o valor de x para que A, B, C e D pertençam a um mesmo plano.

   (b) Ache uma equação geral para o plano que contém os pontos B, C e D.

   (c) Calcule a área do triângulo BCD.

   (d) Ache equações paramétricas para a reta que passa por B e é perpendicular ao plano que contém os pontos B, C e D.

   (e) Determine os valores de x para os quais o paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ tem volume igual a 25.

   (f) Para os valores de x encontrados no item (e), determine a distância do ponto A ao plano Π que contém B, C e D.

2. (9 pontos) Prove que a reta $r : (x, y, z) = (1 + t, -t, 1)$ é paralela ao plano $\Pi : x + y + z = 0$ e não está contida nele. Determine uma equação geral do plano Π' que contém a reta r e é perpendicular ao plano Π.

3. (3 pontos para cada item) Em cada um dos itens abaixo, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta:

   (a) $V \cdot W = \frac{1}{4}(\|V + W\|^2 - \|V - W\|^2)$.

   (b) $V \times (V \times W) = 0$.

Solução

1. (a) Os pontos A, B, C e D são coplanares se e somente se $(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Calculamos $\overrightarrow{BA} = (x - 2, 3, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (3, 1, -2)$, $\overrightarrow{BD} = (1, 0, 5)$ e

$$(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5x + 50.$$

Logo os pontos são coplanares se $-5x + 50 = 0$, ou seja, $x = 10$.

(b) O vetor $N = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ é normal ao plano. Calculamos

$$N = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5E_1 + 13E_2 - E_3 = (-5, 13, -1).$$

Logo uma equação para o plano tem a forma $-5x + 13y - z + d = 0$. Como B pertence ao plano, devemos ter $-5(2) + 13(-2) - (3) + d = 0$, ou seja, $d = 39$. Portanto uma equação para o plano é $-5x + 13y - z + 39 = 0$.

(c) A área do triângulo BCD é igual à metade da área do paralelogramo definida pelos vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$, ou seja,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2}\|(-5, 13, -1)\| = \frac{\sqrt{195}}{2}.$$

(d) O vetor normal ao plano é um vetor diretor da reta em questão, ou seja, $V = N = (-5, 13, -1)$. Observamos que a reta passa por B. Portanto, as equações da reta são

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

(e) Seja v o volume do paralelepípedo. Então $v = |(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}| = |-5x + 50|$. Logo $v = 25$ se e somente se $-5x + 50 = 25$ ou $-5x + 50 = -25$, ou seja, $x = 5$ ou $x = 15$.

(f) Observamos que $d(A, \Pi)$ é igual à altura de A relativa ao plano que contém o paralelogramo determinado por $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Portanto, $d(A, \Pi)$ é igual ao volume do paralelepípedo dividido pela área da base (paralelogramo), ou seja,

$$v = \frac{|(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}|}{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\|} = \frac{25}{\sqrt{195}}.$$

Alternativamente, a distância $d(A, \Pi)$ é dada por $d(A, \Pi) = (\overrightarrow{BA} \cdot N)/\|N\|$.

2. Seja V o vetor diretor de r e seja N o vetor normal de Π. A reta r é paralela ao plano Π se e somente se V e N são ortogonais, ou seja, se e somente se $V \cdot N = 0$. Temos $V = (1, -1, 0)$ e $N = (1, 1, 1)$. Logo $V \cdot N = 1 - 1 + 0 = 0$. Isso prova que r e Π são paralelos.

A reta r está contida em Π se e somente se $x + y + z = 0$ para todo t, ou seja, $1 + t - t + 1 = 0$ para todo t, ou seja, $2 = 0$ para todo t. Mas esse enunciado é falso, portanto r não está contida em Π.

Seja N' um vetor normal do plano Π'. Observamos que r está contida em Π' se e somente se V e N' são perpendiculares, ou seja, se e somente se $V \cdot N' = 0$. Além disso, Π e Π' são perpendiculares se e somente se N e N' são perpendiculares, ou seja, $N \cdot N' = 0$. O vetor $V \times N$ satisfaz essas propriedades. Portanto escolhemos $N' = V \times N$. Calculando, obtemos $N' = (-1, -1, 2)$. Logo uma equação para Π' tem a forma $-x - y + 2z + d = 0$. Como $(1, 0, 1) \in r$, temos $(1, 0, 1) \in \Pi'$ e consequentemente $-(1) - (0) + 2(1) + d = 0$, ou seja, $d = -1$. Portanto, uma equação para Π' é $-x - y + 2x - 1 = 0$.

3. (a) Verdadeiro. Lembrando que $\|S\|^2 = S \cdot S$, obtemos

$$\begin{aligned} \|V + W\|^2 - \|V - W\|^2 &= (V + W) \cdot (V + W) - (V - W) \cdot (V - W) \\ &= V \cdot V + V \cdot W + W \cdot V + W \cdot W - V \cdot W + V \cdot W + W \cdot V - W \cdot W \\ &= 4(V \cdot W). \end{aligned}$$

Portanto $V \cdot W = \frac{1}{4}\|V + W\|^2 - \|V - W\|^2$.

(b) Falso. Por exemplo, se $V = E_1$ e $W = E_2$, então

$$V \times (V \times W) = E_1 \times (E_1 \times E_2) = E_1 \times E_3 = -E_2 \neq 0.$$