Prova 2

MAT 038 - GAAL - Turma B
http://bit.ly/gaal-2017

24 de outubro de 2017

Justifique suas respostas.

1. (9 pontos) Seja $U = (a, b, c)$ um vetor unitário, com $abc \neq 0$. Determine o valor de t de modo que, pondo $V = (-bt, at, 0)$ e $W = (act, bct, -1/t)$, os vetores U, V e W sejam unitários e mutuamente ortogonais.

2. (9 pontos) Seja r a reta determinada pela intersecção dos planos $x+y-z=0$ e $2x-y+3z-1=0$. Determine uma equação geral para o plano Π que contém a reta r e passa por $A = (1, 0, -1)$.

3. (9 pontos) Considere a reta $r : (x, y, z) = (1+2t, 1+mt, 1+t)$ e o plano Π que passa pela origem e é paralelo aos vetores $V_1 = (1, 2, 0)$ e $V_2 = (1, 0, 1)$. Determine o valor de m para que r seja paralela a Π. Para o valor de m encontrado, a reta está contida no plano?

4. (3 pontos para cada item) Em cada um dos itens abaixo, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta:
   (a) $(U \times V) \cdot W = (U \times W) \cdot V$.
   (b) Se $V \times W = V \times U$ e $V \neq 0$, então $W = U$.

Solução

1. Como U é unitário, temos $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Observamos que $U \cdot V = 0$ e $V \cdot W = 0$ para qualquer valor de t. Por outro lado, $U \cdot W = 0$ implica $t = \pm 1/\sqrt{a^2 + b^2}$. Para esses valores de t, obtemos $\|V\|^2 = (b^2 + a^2)t^2 = 1$ e $\|W\|^2 = c^2 + a^2 + b^2 = 1$.

2. Escalonando a matriz aumentada do sistema

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

até a forma escalonada reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Observamos que x e y são variáveis dependentes e z é uma variável livre. Seja $z = t$. As soluções do sistema são

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Essas são equações paramétricas para a reta r. Um vetor diretor para a reta r é $V = (-2/3, 5/3, 1)$, e o ponto $P_0 = (1/3, -1/3, 0)$ pertence a essa reta. Logo os vetores $\overrightarrow{P_0A}$ e V são paralelos ao plano Π. Escolhemos o vetor normal $N = \overrightarrow{P_0A} \times V$. Calculamos $\overrightarrow{P_0A} = (2/3, 1/3, -1)$ e $N = (2, 0, 4/3)$. Logo uma equação para o plano tem a forma $2x + (4/3)z + d = 0$. Como $A \in \Pi$, obtemos $2(1) + 0(0) + (4/3)(-1) + d = 0$, ou seja, $d = -2/3$. Portanto uma equação para o plano é $2x + 4z - 2/3 = 0$.

3. Seja V um vetor diretor para a reta r. Observamos que r é paralela a Π se e somente se V_1, V_2 e V_3 são coplanares, ou seja, $(V_1 \times V_2) \cdot V_3 = 0$. Escolhemos $V = (2, m, 1)$ e calculamos

$$(V_1 \times V_2) \cdot V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = -m + 2.$$

Portanto r é paralela a Π se $-m+2 = 0$, ou seja, $m = 2$. Para esse valor de m, as equações paramétricas assumem a forma

$$r : (x, y, z) = (1 + 2t, 1 + 2t, t).$$

O vetor $N = V_1 \times V_2$ é normal ao plano Π. Calculamos $N = (2, -1, -2)$. Como o plano Π passa pela origem, uma equação para Π é $2x - y - 2z = 0$. A reta está contida no plano se e somente se $2x - y - 2z = 0$ para todo t, ou seja, $2(1 + 2t) - (1 + 2t) - 2(t) = 0$ para todo t, ou seja, $1 = 0$ para todo t. Mas isso é falso (impossível), portanto a reta não está contida no plano.

4. (a) Falso.

$$(U \times V) \cdot W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -(U \times W) \cdot V.$$

(b) Falso. Sejam $v = E_1$, $u = E_1$ e $w = 0$. Observamos que $v \neq 0$. Além disso, $v \times w = E_1 \times 0 = 0$ e $v \times u = E_1 \times E_1 = 0$. Logo $v \times w = v \times u$ mas $u \neq w$.