Prova 2

MAT 038 - GAAL - Turma N
http://bit.ly/gaal-2017

24 de outubro de 2017

Justifique suas respostas.

1. (3 pontos para cada item) Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (2, 2, 0)$ e $D = (1, 0, 0)$.
   (a) Prove que A, B e C não são colineares e calcule a área do triângulo ABC.
   (b) Determine uma equação geral do plano que contém os pontos A, B e C.
   (c) Prove que D não pertence ao plano que contém os pontos A, B e C.
   (d) Escreva o vetor $\overrightarrow{AD}$ como a soma de dois vetores, U e V, onde U é perpendicular ao plano que contém os pontos A, B e C, e V é paralelo a esse plano.

2. Considere o plano $\Pi : x + y - z - 1 = 0$ e a reta $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -1, 1)$.
   (a) (4 pontos) Prove que a reta r está contida no plano Π.
   (b) (5 pontos) Determine uma equação geral do plano Π' que contém a reta r e é perpendicular ao plano Π.

3. (4 pontos para cada item) Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -2x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(1, -2, 2).$$

   (a) Determine equações paramétricas para a reta r_1.
   (b) Determine o plano paralelo a r_1 que contém r_2.
   (c) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2.

Solução

1. (a) Os pontos A, B e C são colineares se e somente se $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. Calculamos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, -1)$ e

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -E_1 + E_2 + E_3 = (-1, 1, 1).$$

Portanto A, B e C não são colineares. A área do triângulo ABC é igual a

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|(-1, 1, 1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) O vetor $N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$ é perpendicular ao plano. Logo uma equação para o plano tem a forma $-x + y + z + d = 0$. Como A pertence ao plano, devemos ter $-(1) + 1(0) + 1(1) + d = 0$, ou seja, $d = 0$. Portanto uma equação para o plano é $-x + y + z = 0$.

(c) O ponto D não pertence ao plano que contém A, B e C se e somente se $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$. Calculamos $\overrightarrow{AD} = (0, 0, 1)$ e

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1) = -1 \neq 0.$$

Isso prova que D não pertence ao plano.

(d) Considere um vetor normal do plano, por exemplo, o vetor N calculado no item (b). Observamos que $\overrightarrow{AD} = U + V$ com $U = \mathrm{Proj}_N \overrightarrow{AD}$ e $V = \overrightarrow{AD} - \mathrm{Proj}_N \overrightarrow{AD}$. Por definição de projeção ortogonal, o vetor U é paralelo a N e V é perpendicular a N, ou seja, é paralelo ao plano. Calculamos

$$U = \mathrm{Proj}_N \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot N}{\|N\|^2} N = \frac{-1}{3}(-1, 1, 1) = (1/3, -1/3, -1/3)$$

e

$$V = \overrightarrow{AD} - \mathrm{Proj}_N \overrightarrow{AD} = (0, 0, -1) - (1/3, -1/3, -1/3) = (-1/3, 1/3, -2/3).$$

2. (a) A reta r está contida no plano Π se e somente se $x + y - z - 1 = 0$ para todo t, ou seja, $(1 + 2t) + (1 - t) - (1 + t) - 1 = 0$ para todo t, ou seja, $0 = 0$ para todo t, o que é verdadeiro. Portanto r está contida em Π.

(b) Seja N um vetor normal de Π, seja N' um vetor normal de Π', e seja V um vetor diretor de r. Observamos que N' e N são ortogonais e N' e V são ortogonais. O vetor $N' = V \times N$ satisfaz essas propriedades. Calculamos $V = (2, -1, 1)$, $N = (1, 1, -1)$ e $N' = (0, 3, 3)$. Logo uma equação geral para o plano Π' tem a forma $3y + 3z + d = 0$. Como o ponto $(1, 1, 1)$ pertence à r e r está contida em Π, o ponto $(1, 1, 1)$ pertence à Π'. Logo, devemos ter $0(1) + 3(1) + 3(1) + d = 0$, ou seja, $d = -6$. Portanto uma equação para o plano Π' é $3y + 3z - 6 = 0$.

3. (a) Escalonando a matriz aumentada do sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -2x - y + z - 2 &= 2 \end{aligned}$$

até a forma escalonada reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 - 2 & -3 & \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observamos que as variáveis x e y são dependentes e a variável z é livre. Escrevendo $z = t$, as soluções do sistema são

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Essas são equações paramétricas para a reta r_1.

(b) Sejam V_1 e V_2 vetores diretores das retas r_1 e r_2, respectivamente. O plano paralelo a r_1 que contém r_2 é paralelo aos vetores V_1 e V_2. Logo o vetor $N = V_1 \times V_2$ é um vetor normal desse plano. Uma equação geral para o plano tem a forma $-4x - 3y - z + d = 0$. Como o ponto $(1, 0, -1)$ pertence à r_2 e r_2 está contida no plano, esse ponto pertence ao plano. Logo, devemos ter $-4(1) - 3(0) - 1(-1) + d = 0$, ou seja, $d = 3$. Portanto uma equação para o plano é $-4x - 3y - z + 3 = 0$.

(c) Como $V_1 \times V_2 \neq 0$, as retas r_1 e r_2 não são paralelas nem coincidentes. Logo elas são concorrentes ou reversas. Escolhemos os pontos $P_1 = (-3, 4, 0)$ e $P_2 = (1, 0, -1)$ pertencentes às retas r_1 e r_2, respectivamente. Calculamos $\overrightarrow{P_1P_2} = (4, -4, -1)$ e $(V_1 \times V_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 3 \neq 0$. Logo os vetores V_1, V_2 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ não são coplanares, ou seja, as retas não são concorrentes. Portanto as retas são reversas.