Prova 3

MAT 038 - GAAL - Turma A
http://bit.ly/gaal-2017

30 de novembro de 2017

Justifique suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 0 \\ 9x - 6y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

   (a) (5 pontos) Determine o conjunto solução do sistema.

   (b) (5 pontos) Obtenha vetores geradores unitários para o conjunto solução.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) (3 pontos) Determine o polinômio característico e os autovalores de A.

   (b) (3 pontos) Para cada autovalor, determine um autovetor unitário associado.

   (c) (3 pontos) Determine as matrizes P e D (com D diagonal) tais que $P^{-1}AP = D$.

   (d) (3 pontos) Considere a cônica definida pela equação

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0.$$

   Identifique essa cônica e escreva sua equação na forma padrão.

   (e) (3 pontos) No plano xy, represente os autovetores de A e faça um esboço da cônica.

3. Considere o conjunto $E = \{U_1, U_2\}$ onde $U_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $U_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

   (a) (5 pontos) O conjunto E é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$? Explique.

   (b) (5 pontos) Escreva o vetor $V = (1 + 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - 2)$ como combinação linear de U_1 e U_2.

Solução

1. (a) A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 \\ 9 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo x e z são variáveis dependentes e y é uma variável livre. Resolvendo de baixo para cima o sistema de equações associado, obtemos $x = (2/3)t$, $y = t$ e $z = 0$, ou seja, $(x, y, z) = t(2/3, 1, 0)$ para $t \in \mathbb{R}$.

(b) O vetor $V_1 = (2/3, 1, 0)$ é um vetor gerador para o conjunto solução. Normalizando esse vetor, obtemos o vetor unitário $U_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0)$.

2. (a) O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Os autovalores de A são as raízes da equação $p(\lambda) = 0$, ou seja, $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, ou seja, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

(b) A matriz aumentada do sistema $(A - 1I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções do sistema são $(x, y) = (-t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos um autovalor unitário $U_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

A matriz aumentada do sistema $(A - 3I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções do sistema são $(x, y) = (t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos um autovalor unitário $U_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(c) As matrizes P e D tais que $P^{-1}AP = D$ são

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(d) A equação da cônica na forma padrão é $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - 1 = 0$, ou seja, $(x')^2 + 3(y')^2 = 1$, ou seja

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{1/3} = 1.$$

Observamos que essa cônica é uma elipse.

(e) Figura com um esboço dos autovetores e da cônica no sistema de coordenadas xy.

3. (a) Observamos que $U_1 \cdot U_2 = (1/2)(-\sqrt{3}/2) + (-\sqrt{3}/2)(1/2) = 0$, logo, os vetores U_1 e U_2 são ortogonais. Isso implica que o conjunto E é linearmente independente. Observamos também que $\|U_1\|^2 = 1/4 + 3/4 = 1$ e $\|U_2\|^2 = 3/4 + 1/4 = 1$, ou seja, os vetores são unitários. O conjunto E tem dois elementos e $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2. Portanto E é uma base (ortonormal) de $\mathbb{R}^2$.

(b) Procuramos α e β tais que $V = \alpha U_1 + \beta U_2$, ou seja,

$$(1 + 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - 2) = \alpha(1/\sqrt{2}, \sqrt{3}/2) + \beta(-\sqrt{3}/2, 1/2),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (1/2)\alpha + (-\sqrt{3}/2)\beta &= 1 + 2\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}/2)\alpha + (1/2)\beta &= \sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1+2\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução do sistema é $\alpha = 2$ e $\beta = -4$. Logo $V = 2U_1 - 4U_2$.