Prova 3

MAT 038 - GAAL - Turma B
http://bit.ly/gaal-2017

30 de novembro de 2017

Justifique suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 0 \\ 9x - 6y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

   (a) (5 pontos) Determine o conjunto solução do sistema.
   (b) (5 pontos) Obtenha vetores geradores unitários para o conjunto solução.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) (5 pontos) Determine o polinômio característico e os autovalores de A.
   (b) (5 pontos) Para cada autovalor, ache uma base de vetores unitários para o subespaço de autovetores associado.
   (c) (2 pontos) Determine as matrizes P e D (com D diagonal) tais que $P^T AP = D$.

3. Considere a cônica cuja equação é dada por

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0.$$

   (a) (8 pontos) Ache uma mudança de coordenadas de modo que a equação resultante fique na forma padrão.
   (b) (4 pontos) Identifique a cônica e esboce seu gráfico no sistema de coordenadas xy original.

Solução

1. (a) A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 \\ 9 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto x é uma variável dependente e y e z são variáveis livres. Resolvendo de baixo para cima o sistema associado, obtemos $x = (2/3)s - (1/3)t$, $y = s$ e $z = t$, ou seja,

$$(x, y, z) = s(2/3, 1, 0) + t(-1/3, 0, 1)$$

para $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Os vetores $V_1 = (2/3, 1, 0)$ e $V_2 = (-1/3, 0, 1)$ são vetores geradores para o conjunto solução. Normalizando esses vetores, obtemos os vetores unitários $U_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0)$ e $U_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (-1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10})$.

2. (a) O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9.$$

Os autovalores de A são as raízaes da equação $p(\lambda) = 0$, ou seja, $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

(b) A matriz aumentada do sistema $(A - (-1)\lambda I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo x e z são variáveis dependentes e y é uma variável independente. As soluções do sistema são $x = -t$, $y = t$ e $z = 0$, ou seja, $(x, y, z) = t(-1, 1, 0)$ para $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos um autovetor unitário $U_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Portanto $\{U_1\}$ é uma base para o subespaço de autovetores.

A matriz aumentada do sistema $(A - 3\lambda I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo x é uma variável dependente e y e z são variáveis independentes. As soluções do sistema são $x = s$, $y = s$ e $z = t$, ou seja, $(x, y, z) = s(1, 1, 0) + t(0, 0, 1)$ para $s, t \in \mathbb{R}$. Sejam $V_2 = (1, 1, 0)$ e $V_3 = (0, 0, 1)$. Os vetores $U_2 = (1/\|V_2\|) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ e $U_3 = V_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base para o subespaço de autovetores.

(c) As matrizes P e D tais que $P^T A P = D$ são

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz associada à equação da cônica é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 8\lambda + 12$. Os autovalores de A são as raízes de $p(\lambda) = 0$, ou seja, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$.

A matriz aumentada do sistema $(A - 2I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções são $x = (\sqrt{3}/3)t$, $y = t$ para $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1$, obtemos o vetor $V_1 = (\sqrt{3}/3, 1)$. Normalizando esse autovetor, obtemos $U_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/3, 1) = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

A matriz aumentada do sistema $(A - 6I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções são $x = -\sqrt{3}t$, $y = t$ para $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1$, obtemos o vetor $V_2 = (-\sqrt{3}, 1)$. Normalizando esse autovetor, obtemos $U_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (1/2)(-\sqrt{3}, 1) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$.

A mudança de variáveis do sistema xy para o sistema $x'y'$ é dada por $X' = P^T X$ onde

$$P = [U_1 \; U_2] = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

No sistema de coordenadas $x'y'$, a equação da cônica é $2(x')^2 + 6(y')^2 = 6$, ou seja,

$$\frac{(x')^2}{3} + (y')^2 = 1.$$

Essa equação define uma elipse.

(b) Figura com esboço dos autovetores e da elipse no sistema de coordenadas xy.