

Prova 3

MAT 038 - GAAL - Turma N

<http://bit.ly/gaal-2017>

30 de novembro de 2017

Justifique suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$6x - 4y + 12z = 0$$

$$9x - 6y + 18z = 0$$

- (a) (5 pontos) Determine o conjunto solução do sistema.
- (b) (5 pontos) Obtenha vetores geradores unitários para o conjunto solução.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) (5 pontos) Determine o polinômio característico e os autovalores de A .
- (b) (5 pontos) Para cada autovalor, ache uma base para o subespaço de autovetores associado.
- (c) (2 pontos) Determine as matrizes P e D (com D diagonal) tais que $P^{-1}AP = D$.

3. Considere a cônica cuja equação é dada por

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4 = 0.$$

- (a) (8 pontos) Ache uma mudança de coordenadas de modo que a equação resultante fique na forma padrão.
- (b) (4 pontos) Identifique a cônica e esboce seu gráfico no sistema de coordenadas xy original.

Solução

1. (a) A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 12 & 0 \\ 9 & -6 & 18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto x é uma variável dependente e y e z são variáveis livres. Resolvendo de baixo para cima o sistema associado, obtemos $x = (2/3)s - 2t$, $y = s$ e $z = t$, ou seja,

$$(x, y, z) = s(2/3, 1, 0) + t(-2, 0, 1)$$

para $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Os vetores $V_1 = (2/3, 1, 0)$ e $V_2 = (-2, 0, 1)$ são vetores geradores para o conjunto solução. Normalizando esses vetores, obtemos os vetores unitários $U_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0)$ e $U_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (-2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})$.

2. (a) O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1 - \lambda)^2 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda.$$

Os autovalores de A são as raízes da equação $p(\lambda) = 0$, ou seja, $-\lambda(1 - \lambda)^2 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

(b) A matriz aumentada do sistema $(A - 0\lambda I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo x e y são variáveis dependentes e z é uma variável independente. As soluções do sistema são $x = -t$, $y = 0$ e $z = t$, ou seja, $(x, y, z) = t(-1, 0, 1)$ para $t \in \mathbb{R}$. Escolhendo $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos um autovetor unitário $U_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Portanto $\{U_1\}$ é uma base para o subespaço de autovetores.

A matriz aumentada do sistema $(A - 1\lambda I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo x é uma variável dependente e y e z são variáveis independentes. As soluções do sistema são $x = 0$, $y = s$ e $z = t$, ou seja, $(x, y, z) = s(0, 1, 0) + t(0, 0, 1)$ para $s, t \in \mathbb{R}$. Sejam $V_2 = (0, 1, 0)$ e $V_3 = (0, 0, 1)$. Os vetores V_2 e V_3 formam uma base para o subespaço de autovetores.

(c) As matrizes P e D tais que $P^T A P = D$ são

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz associada à equação da cônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$. Os autovalores de A são as raízes de $p(\lambda) = 0$, ou seja, $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$.

A matriz aumentada do sistema $(A - (-2)I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções são $x = -t$, $y = t$ para $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos o autovetor unitário $U_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

A matriz aumentada do sistema $(A - 4I)X = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções são $x = t$, $y = t$ para $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos o autovetor unitário $U_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

A mudança de variáveis do sistema xy para o sistema $x'y'$ é dada por $X' = P^T X$ onde

$$P = [U_1 \ U_2] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

No sistema de coordenadas $x'y'$, a equação da cônica é $-2(x')^2 + 4(y')^2 = -4$, ou seja,

$$\frac{(x')^2}{2} - (y')^2 = 1.$$

Essa equação define uma hipérbole.

(b) Figura com esboço dos autovetores e da hipérbole no sistema de coordenadas xy .