# Prova 1

MAT 105 - GAAL - Turma F
http://bit.ly/turma-f

17 de abril de 2017

1. (5 pontos) Qual é o ponto do Eixo $OY$ equidistante dos pontos $A = (-3, 1)$ e $B = (-1, 3)$?
2. (6 pontos) Considere os pontos $A = (-2, 0)$ e $A' = (2, 0)$. Que condição devem satisfazer as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ para que os segmentos $AP$ e $A'P$ sejam perpendiculares? Faça uma figura do conjunto de pontos do plano que satisfazem essa condição.
3. (7 pontos) Seja $s$ a reta que passa pelo ponto $P = (5, -1)$ e é perpendicular à reta $-x+3y = 10$. Determine a equação da reta $s$ na forma $y = ax + b$. Qual é o ponto de ordenada 3 na reta $s$?
4. (7 pontos) Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Determine os vértices desse triângulo e calcule a sua área.

Fórmulas:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \text{área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}|(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|.$$

## Solução

**Questão 1.** Seja $P = (0, y)$. Procuramos $y$ tal que $d(P, A) = d(P, B)$. Essa condição é satisfeita se e somente se

$$\begin{aligned} d(P, A)^2 &= d(P, B)^2 \\ (0 - (-3))^2 + (y - 1)^2 &= (0 - (-1))^2 + (y - 3)^2 \\ 9 + y^2 - 2y + 1 &= 1 + y^2 - 6y + 9 \\ 4y &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Portanto o ponto procurado é $P = (0, 0)$.

**Questão 2.** Observamos que os segmentos $AP$ e $A'P$ são perpendiculares se e somente se

$$\begin{aligned} (x - (-2))(x - 2) + (y - 0)(y - 0) &= 0 \\ (x + 2)(x - 2) + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4 + y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Essa é a condição procurada sob $x$ e $y$. O conjunto de pontos do plano que satisfazem essa condição é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2.

**Questão 3.** Seja $r$ a reta representada por $-x+3y = 10$. Uma equação para a reta $s$ perpendicular a $r$ tem a forma $-3x - y = c$. Como $P = (5, -1)$ pertence à $s$, temos $-3(5) - (-1) = c$, ou seja, $c = -14$. Logo, $-3x - y = -14$ é uma equação para a reta $s$. Resolvendo essa equação para $y$ obtemos uma equação na forma $y = ax + b$:

$$y = -3x + 14.$$

Se $P = (x, y)$ pertence à reta $s$ e $y = 3$, então $3 = -3x + 14$, ou seja, $x = 11/3$. Portanto o ponto de ordenada 3 na reta $s$ é

$$\left(\frac{11}{3}, 3\right).$$

**Questão 4.** Considere as equações

$$y = 2x + 1, \tag{1}$$
$$y = 3x - 2, \tag{2}$$
$$y = 1 - x. \tag{3}$$

Os vértices do triângulo são determinados pela interseção de cada par de retas.

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), obtemos

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 3x - 2 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Logo $y = 2x + 1 = 2(3) + 1 = 7$. Portanto o vértice $A_1$ é dado por $A_1 = (3, 7)$.

Resolvendo o sistema formado por (2) e (3), obtemos

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 1 - x \\ x &= 3/4. \end{aligned}$$

Logo $y = 3x - 2 = 3(3/4) - 2 = 1/4$. Portanto o vértice $A_2$ é dado por $A_2 = (3/4, 1/4)$.

Resolvendo o sistema formado por (3) e (1), obtemos

$$\begin{aligned} 1 - x &= 2x + 1 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Logo $y = 1 - x = 1 - 0 = 1$. Portanto o vértice $A_3$ é dado por $A_3 = (0, 1)$.

Em resumo, os vértices do triângulo são

$$A_1 = (3, 7), \qquad A_2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \qquad A_3 = (0, 1).$$

Consequentemente, a área do triângulo $A_1A_2A_3$ é dada por

$$\text{Área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}|(3 - 0)(1/4 - 1) - (3/4 - 0)(7 - 1)| = \frac{27}{8}.$$