Prova 2

MAT 105 - GAAL - Turma F
http://bit.ly/turma-f

15 de maio de 2017

1. (5 pontos) Considere os vetores $u = (2, 3)$ e $v = (-1, 2)$. Calcule o comprimento de v, o produto interno de u e v, e o vetor $3v - 2u$.
2. (5 pontos) Exprima o vetor $w = (3, 4)$ como combinação linear de $u = (-2, 1)$ e $v = (1, -1)$.
3. (5 pontos) Dados os vetores u e v com $u \neq 0$, prove que o vetor $w = v - \dfrac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ é perpendicular a u.
4. (5 pontos) A distância entre os vértices de uma hipérbole é igual a 4 e os focos da hipérbole são $F' = (-3, 0)$ e $F = (3, 0)$. Qual é a equação dessa hipérbole?
5. (5 pontos) Dizemos que uma reta é tangente a uma parábola quando elas têm um único ponto em comum e a reta não é paralela ao eixo OY. Prove que a reta $y = 7x - 3$ é tangente à parábola $y = x^2 + 3x + 1$ no ponto $(2, 11)$.

Solução

Questão 1. Comprimento de v:

$$|v| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Produto interno de u e v:

$$\langle u, v \rangle = 2(-1) + 3(2) = -2 + 6 = 4.$$

Vetor $3v - 2u$:

$$3v - 2u = 3(-1, 2) - 2(2, 3) = (-3, 6) + (-4, -6) = (-7, 0).$$

Questão 2. Procuramos números α e β tais que $w = \alpha u + \beta v$, ou seja,

$$(3, 4) = \alpha(-2, 1) + \beta(1, -1) = (-2\alpha, \alpha) + (\beta, -\beta) = (-2\alpha + \beta, \alpha - \beta),$$

ou seja

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= 3, \\ \alpha - \beta &= 4. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $\alpha = -7$ e $\beta = -11$. Portanto $w = -7u - 11v$.

Questão 3. Os vetores w e u são perpendiculares entre si se e somente se $\langle u, w \rangle = 0$. Calculamos

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \left\langle u, v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle \\ &= \langle u, v \rangle + \left\langle u, -\frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle \right\rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto u é perpendicular a w.

Questão 4. Os focos da hipérbole são $F' = (-c, 0)$ e $F = (c, 0)$ com $c = 3$. Além disso, como os focos da hipérbole estão situados no eixo OX e a distância entre eles é igual a 4, os vértices são os pontos $A' = (-a, 0)$ e $A = (a, 0)$ com $a = 2$. Logo $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. Portanto a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Questão 5. Observamos que a reta $y = 7x - 3$ não é vertical. O ponto $(2, 11)$ satisfaz as duas equações, de fato

$$11 = y = 7x - 3 = 7(2) - 3 = 14 - 3 = 11 \qquad \text{e} \qquad 11 = y = x^2 + 3x + 1 = 2^2 + 3(2) + 1 = 11.$$

Além disso, substituindo $y = 7x - 3$ em $y = x^2 + 3x + 1$ e simplificando obtemos

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

O discriminante dessa equação é igual a zero: $\Delta = 4^2 - 4(4) = 0$. Portanto $x = 2$ é a única raiz da equação. Logo $(2, 11)$ é a única solução do sistema de equações. Conclusão: a reta é tangente à parábola no ponto $(2, 11)$.