Prova 3

MAT 105 - GAAL - Turma F
http://bit.ly/turma-f

14 de junho de 2017

1. (5 pontos) Considere a forma quadrática $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
   (a) Escreva sua matriz e sua equação característica.
   (b) Obtenha seus autovalores.
   (c) Descreva suas linhas de nível.
   (d) Calcule autovetores unitários u e v.
2. (5 pontos) Considere o quadrado $ABCD$ onde $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$. Considere a transformação definida por $T(x, y) = (-y, x)$. Qual é a área do polígono no qual é transformado o quadrado $ABCD$ por T?
3. (5 pontos) Dados $A = (5, 2, 3)$ e $B = (4, 10, 18)$, determine o ponto de intersecção da reta AB com o plano Π_{xy}.
4. (5 pontos) Dados os vetores $w = (\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')$, $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, calcule os produtos internos $\langle u, w\rangle$ e $\langle v, w\rangle$. Qual relação entre u e v implica $w = 0$?
5. (5 pontos) Sem usar coordenadas, explique o significado das seguintes afirmações:
   (a) Os vetores u e v são colineares.
   (b) Os vetores u, v e w são coplanares.

Solução

Questão 1. A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 1/2$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad u^* = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}s - \frac{1}{\sqrt{2}}t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t,$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s, t) = \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{s^2}{2/3} + \frac{t^2}{2}.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é o ponto $(s,t) = (0,0)$. Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são elipses.

Questão 2. A área do quadrado $ABCD$ é igual a 1. A transformação $T(x,y) = (-y,x)$ é uma rotação de 90 graus no sentido positivo. Rotações preservam áreas. Portanto a área de $ABCD$ transformado por T é igual a 1. De fato, $ABCD$ é transformado por T em $A'B'C'D'$, onde $A' = (0,0)$, $B' = (0,1)$, $C' = (-1,1)$ e $D' = (-1)$. Logo $A'B'C'D'$ é um quadrado cuja área é igual a 1.

Questão 3. As equações paramétricas da reta AB são

$$\begin{aligned} x &= 5 + t(5-1) = 5 + 4t, \\ y &= 2 + t(10-2) = 2 + 8t, \\ z &= 3 + t(18-3) = 3 + 15t. \end{aligned}$$

A equação do plano Π_{xy} é $z = 0$. Portanto, a reta intersecta o plano quando $z = 0$, ou seja, quando $3+15t = 0$, ou seja, quando $t = -1/5$. O ponto da reta AB correspondente a $t = -1/5$ tem coordenadas $x = 5 + 4(-1/5) = 21/5$, $y = 2 + 8(-1/5) = 2/5$ e $z = 0$, ou seja, é o ponto $P = (21/5, 2/5, 0)$.

Questão 4. Calculamos

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \alpha\beta\gamma' - \alpha\gamma\beta' + \beta\gamma\alpha' - \beta\alpha\gamma' + \gamma\alpha\beta - \gamma\beta\alpha' = 0, \\ \langle v, w \rangle &= \alpha'\beta\gamma' - \alpha'\gamma\beta' + \beta'\gamma\alpha' - \beta'\alpha\gamma' + \gamma'\alpha\beta' - \gamma'\beta\alpha' = 0. \end{aligned}$$

Observamos que se u e v são colineares, então $w = 0$. De fato, se u e v são colineares, então (α, β) e (α', β') são colineares, o que implica $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$, além disso, (α, γ) e (α', γ') são colineares, o que implica $\gamma\alpha' - \alpha\gamma' = 0$, além disso, (β, γ) e (β', γ') são colineares, o que implica $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 0$. Ou seja, u e v colineares implica $w = 0$.

Questão 5. (a) Se os vetores u e v são colineares, então quando representamos os dois vetores usando o mesmo ponto inicial, os três pontos obtidos são colineares, ou seja, quando escrevemos $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, os pontos A, B e C são colineares (ou seja, pertencem à mesma reta). (b) Se os vetores u, v e w são coplanares, então quando representamos os três vetores usando o mesmo ponto inicial, os quatro pontos obtidos são coplanares, ou seja, quando escrevemos $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$, os pontos A, B, C e D são coplanares (ou seja, pertencem ao mesmo plano).