Prova 4

MAT 105 - GAAL - Turma F
http://bit.ly/turma-f

7 de julho de 2017

Justifique suas respostas.

1. (6 pontos) Ache uma equação para o plano que contém o ponto $P = (1, 1, -1)$ e é perpendicular à reta AB onde $A = (1, -1, 0)$ e $B = (0, 1, 2)$.
2. (6 pontos) Sejam $x = 1/2 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 - 3t$ para $t \in \mathbb{R}$ as equações paramétricas da reta r. Decida se a reta r pertence ou não ao plano $2x + 7y + 5z = 18$.
3. (6 pontos) Analise o seguinte sistema de equações e diga se ele é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 8 \\ 9x - 6y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

4. (8 pontos) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

   Os vetores-linha da matriz desse sistema são linearmente independentes?

5. (4 pontos) Calcule mp onde

$$m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad p = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Questão 1. Observamos que o plano é perpendicular à reta AB se e somente se o plano é perpendicular à reta OB' com $B' = (0 - 1, 1 - (-1), 2 - 0) = (-1, 2, 2)$. Uma equação para o plano é $-x + 2y + 2z = d$ para alguma constante d. Como P pertence ao plano, devemos ter $-1(1) + 2(1) + 2(-1) = d$, ou seja, $d = -1$. Portanto uma equação para plano é $-x + 2y + 2z = -1$.

Questão 2. Temos que decidir se $(x, y, t) = (1/2 + t, 1 + 2t, 2 - 3t)$ satisfaz ou não a equação do plano para todo $t \in \mathbb{R}$. Substituindo as equações paramétricas na equação do plano, obtemos

$$2(1/2 + t) + 7(1 + 2t) + 5(2 - 3t) = 18,$$

ou seja,

$$18 + t = 18.$$

Logo a equação é satisfeita apenas para $t = 0$. Portanto a reta r não pertence ao plano.

Questão 3. Consideramos os vetores linha da matriz do sistema: $l_1 = (6, -4, 2)$ e $l_2 = (9, -6, 3)$. Resolvendo a equação $l_1 = kl_2$ para k, concluímos que existe k tal que $l_1 = kl_2$. De fato, $l_1 = (2/3)l_2$. Portanto l_1 e l_2 são colineares. Logo os planos definidos pelas equações do sistema são parelelos ou coincidentes. Agora, consideramos os vetores linha da matriz aumentada do sistema: $L_1 = (4, -4, 2, 8)$ e $L_2 = (9, -6, 3, 12)$. Observamos que a razão entre as últimas coordenadas dos vetores é $8/12 = 2/3$. Logo existe k tal que $L_1 = kL_2$, ou seja, L_1 e L_2 são colineares. De fato $L_1 = (2/3)L_2$. Portanto os planos são coincidentes. Logo o sistema é indeterminado.

Questão 4. A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (1/3)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2/3)L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 5/3 \\ 0 & -7/3 & 7/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2 \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 14 & 12 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema correspondente de baixo para cima, obtemos $z = 6/7$, $y = 5/7$ e $x = -3/7$. Portanto $(x, y, z) = (-3/7, 5/7, 6/7)$ é a única solução desse sistema. Logo o sistema é determinado e consequentemente os vetores-linha da matriz do sistema são linearmente independentes. De fato, um sistema é determinado se e somente se os vetores-linha da matriz do sistema são linearmente independentes, o que ocorre se e somente se os vetores-coluna da matriz do sistema são linearmente independentes, o que ocorre se e somente se o determinante da matriz do sistema é diferente de zero.

Questão 5. Calculando obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}.$$