Lista de Exercícios
Geometria Analítica e Álgebra Linear
MAT 105 – Turma M

26 de junho de 2017

Esta lista contém exercícios de [1], [2] e [3]. Os exercícios estão separados em aulas.

Aula 1

1. Sejam k e r duas retas paralelas, e seja s uma reta que intersecta a reta k em um ponto P. O que você pode concluir sobre as retas s e r? Por que?

   Sugestão: Faça uma figura e lembre-se dos postulados que vimos em aula.

2. Quais dos seguintes conjuntos de comprimentos podem ser conjuntos de comprimentos dos lados de um triângulo?

   (a) $\{2, 2, 2\}$.
   (b) $\{3, 4, 5\}$.
   (c) $\{5, 8, 2\}$.
   (d) $\{3, 3, 2\}$.
   (e) $\{3/2, 5, 7/2\}$.
   (f) $\{5/2, 7/2, 9/2\}$.

3. Sejam a e b, com $a < b$, as coordenadas dos pontos A e B sobre um eixo E, respectivamente. Seja n um inteiro tal que $n \geq 2$. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento de reta AB em n partes iguais.

   Sugestão: Resolva o problema para algum valor de n específico, por exemplo, $n = 3$, e depois resolva o caso geral.

4. Sejam a, x e b, com $a < x < b$, as coordenadas dos pontos A, X e B sobre um eixo E, respectivamente. Dizemos que o ponto X divide o segmento de reta AB em *média e extrema razão* se X satisfaz

   $$\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = \frac{d(X,B)}{d(A,X)}.$$

   O quociente $d(A,X)/d(A,B)$ é chamado *razão áurea*. Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

   Observações: (i) Procuramos x tal que $a < x < b$ (verifique quais raízes satisfazem essa condição). (ii) Por hipótese, temos $a < b$. Isso implica que $-b < -a$. (iii) Para simplificar, considere primeiro o caso particular em que $a = 0$ e $b = 1$ (o que acontece com as raízes?).

5. Seja O a origem de um eixo E, e seja A o ponto desse eixo cuja coordenada é igual a 1. Qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? Calcule a *razão áurea* $d(O,X)/d(O,A)$.

6. Quando A é o ponto médio do segmento de reta XX', dizemos que X' é o *simétrico de* X *em relação ao ponto* A. Os pontos A, X e X' sobre um eixo E têm coordenadas a, x e x', respectivamente. Suponha que X' é o simétrico de X em relação a A. Calcule x' em função de a e x. Calcule x em função de a e x'.

Aula 2

1. Sejam k e r retas perpendiculares, e considere uma reta s perpendicular à reta r. O que você pode concluir sobre as retas k e s? Por que?

   Sugestão: Faça uma figura e lembre-se dos postulados que vimos em aula.

2. Para cada uma das equações listadas abaixo, descreva o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem a equação.

   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   (b) $y^2 - 6y + 9 = 0$.
   (c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.
   (d) $(x^2 + 1)(x - y) = 0$.

3. Em cada um dos casos listados abaixo, esboce no plano o conjunto dos pontos cujas coordenadas x e y satisfazem as condições especificadas.

   (a) $|x - 3| < 1$.

(b) $|x-3|=1$.

(c) $|x-3|\leq 1$ e $|y-2|\leq 5$.

Observação: Dado $u\in\mathbb{R}$, lembre que $|u|<1$ significa $-1<u<1$. Mais geralmente, para qualquer valor de c, a desigualdade $|u|<c$ significa $-c<u<c$.

4. Três vértices de um retângulo são $O=(0,0)$, $A=(a,a)$ e $B=(-b,b)$ com $a>0$ e $b>0$. Qual é o quarto vértice?

   Sugestão: Faça uma figura. O que acontece quando você "anda" do ponto O para o ponto A?

Aula 3

1. Quando B é o ponto médio do segmento de reta YY', dizemos que Y' é o *simétrico de* Y *em relação ao ponto* B. Qual é o simétrico do ponto $X=(x,y)$ em relação ao ponto $A=(a,b)$? Em particular, qual é o simétrico de X em relação à origem O?

2. Os pontos A, B e X sobre um eixo E têm coordenadas a, b e x, respectivamente. Seja X' o simétrico de X em relação a A, e seja X'' o simétrico de X' em relação a B. Quais são as coordenadas de X' e X''?

   Observação: A resposta deve depender dos dados do problema, que são a, b e x.

3. Em cada um dos casos a seguir, decida se o segmento AA' corta um dos eixos, nenhum deles ou ambos. Determine o(s) ponto(s) de intersecção quando existir(em).

   (a) $A=(-5,3)$, $A'=(-1,-2)$.

   (b) $A=(2,-1)$, $A'=(7,-15)$.

   (c) $A=(-3,-1)$, $A'=(4,2)$.

4. Em cada um dos casos listados abaixo, determine (se existir) o ponto de intersecção dos segmentos AA' e BB'. Se os segmentos não se intersectarem, decida se os segmentos pertencem a retas concorrentes, paralelas, ou paralelas e coincidentes.

   (a) $A=(1,3)$, $A'=(2,-1)$, $B=(-1,1)$, $B'=(4,1)$.

   (b) $A=(0,0)$, $A'=(1,1)$, $B=(3,4)$, $B'=(-1,5)$.

   (c) $A=(1,234)$, $A'=(0,123)$, $B=(315,18)$, $B'=(317,240)$.

   (d) $A=(2,5)$, $A'=(3,6)$, $B=(18,21)$, $B'=(40,43)$.

5. Dizemos que o ponto A' é o *simétrico do ponto* A *em relação à reta* r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Sabendo que $A = (x, y)$, determine o simétrico de A em relação ao eixo OX e o simétrico de A em relação ao eixo OY.

6. O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5\}$ corresponde a uma reta paralela ao eixo OX. Seja r essa reta. Determine o simétrico do ponto $P = (3, -2)$ em relação à reta r.

Aula 4

1. Sejam $A = (2, -5)$ e $B = (5, -2)$. De um exemplo de pontos C e D tais que as retas AB e CD sejam perpendiculares.

2. Sejam $A = (2, 5)$, $B = (4, 2)$, $C = (3, 4)$ e $D = (0, y)$. Para qual valor de y as retas AB e CD são perpendiculares?

3. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Sabe-se que $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$ e $C = (6, 4)$. Quais são as coordenadas do vértice D? Seja M o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Quais são as coordendas de M?

4. O triângulo ABC com $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$, onde $a > 0$, é equilátero. Quais são os possíveis valores de y?

5. Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$ com $a \neq 0$. Determine x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

6. Qual ponto do eixo OX é equidistante dos pontos $(1, -3)$ e $(3, -1)$?

Aula 5

1. Dados $A = (2, 5)$ e $C = (-8, 2)$. Calcule os cossenos dos ângulos $O\hat{A}C$ e $O\hat{C}A$.

2. Em cada um dos casos listados abaixo, decida se o triângulo ABC tem um ângulo obtuso, um ângulo reto, ou se seus três ângulos são agudos:

   (a) $A = (0, 0)$, $B = (3, 152)$, $C = (-45, 1)$.
   (b) $A = (1, 2)$, $B = (2, -3)$, $C = (4, 8)$.
   (c) $A = (2, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (3, 10)$.

3. Identifique os seguintes subconjuntos do plano por meio de suas coordenadas polares R e θ.

   (a) $R = 3$.

(b) $\theta = 3\pi/4$.

(c) $R\cos\theta = 5$.

4. Esboce a curva descrita pelo ponto de coordenadas polares $R = t$ e $\theta = 2\pi t$ quando t assume todos os valores reais positivos.

Aula 6

1. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que

$$d(A,B)^2 + d(B,C)^2 + d(C,D)^2 + d(D,A)^2 = d(A,C)^2 + d(B,D)^2$$

(a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

2. O triângulo ABC é equilátero e seu lado mede l. Num sistema de coordenadas em que a origem é equidistante de A, B e C e o ponto C está sobre o Eixo OY, quais são as coordenadas dos três vértices?

3. Chama-se *baricentro* de um triângulo ao ponto de interseção de suas medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos:

   (a) $A = (1,5)$, $B = (3,2)$ e $C = (2,4)$.

   (b) $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$.

Aula 7

1. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1,1)$ e é paralela à reta $y = -2x + 5$?

2. Sejam $A = (1,2)$ e $B = (-3,-4)$. Qual é o ponto de abcissa 2 sobre a reta que passa pelo ponto $C = (5,6)$ e é perpendicular a AB?

3. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Determine os vértices desse triângulo.

4. Os pontos $A = (2,5)$ e $A' = (14,1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação dessa reta.

5. Determine os pontos que pertencem à reta $y = 2x + 1$ e estão situados à distância 2 da origem.

6. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas OXY adequado e use-o para provar que as diagonais do paralelogramo cortam-se mutualmente ao meio.

Aula 8

1. Sob a forma $ax + by = c$, escreva a equação da reta perpendicular à reta $3x + 2y = 5$ que passa pelo ponto $P = (-1, -2)$.

2. Sejam p e q tais que $pq \neq 0$. Escreva, sob a forma $ax + by = 1$, a equação da reta que corta os eixos OX e OY nos pontos $P = (p, 0)$ e $Q = (0, q)$, respectivamente.

3. Qual é o ponto de ordenada 3 na reta paralela a $3x - 2y = 2$ tirada pelo ponto $A = (5, -1)$?

4. Em que ponto a reta $ax + by = c$ corta o eixo OX? E o eixo OY?

5. Dado que $b \neq 0$, exiba pontos com abcissas 2, 3 e 4 sobre a reta $ax + by = c$.

Aula 9

1. Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $(2, 3)$ e é perpendicular à reta $5x - 3y = 2$.

2. Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$ e $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

3. Escreva uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos $(7, -2)$ e $(3, 4)$.

4. Determine uma representação paramétrica para a reta $5x - 2y = 1$.

5. A reta definida pelas equações paramétricas $x = 2t + 7$ e $y = 3t + 8$ forma um ângulo agudo α com a reta $5x + 11y = 6$. Determine α.

6. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pela origem e faz um ângulo de 45^o com a reta $(1/2)x + (\sqrt{3}/2)y = 1$.

7. Qual é o raio da circunferência que tem centro no ponto $P = (4, 1)$ e é tangente à reta $3x + 7y = 2$?

   Sugestão: (i) Que condição define uma circunferencia com centro em P? (ii) Em quantos pontos uma reta e uma circunferência podem se intersectar? E no caso em que a reta é tangente à circunferência?

Aula 10

1. Qual é a distância da origem à reta $5x - 2y = 8$?

2. Os vértices do triângulo ABC são $A = (2, 1)$, $B = (1, 4)$ e $C = (5, 5)$. Qual é o comprimento da altura baixada de A sobre a base BC?

3. Determine a distância do ponto $P = (3, 1)$ à reta $x + 2y = 3$. Seja δ essa distância. Determine o ponto $Q = (x, y)$ sobre a reta tal que $d(P, Q) = \delta$.

4. Calcule a distância do ponto $(-2, 3)$ à reta cujas equações paramétricas são $x = 2 - 3t$ e $y = 1 - 4t$ para $t \in \mathbb{R}$.

5. Determine as equações das retas paralelas à reta $3x - 4y = 1$ situadas à distância 5 dessa reta?

6. Calcule a área do triângulo cujos vértices são intersecções de duas das retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y = 3$.

7. Calcule a área do pentágono cujos vértices são os pontos $(-2, 3)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 5)$.

Aula 11

1. Esboce o gráfico do conjunto das soluções de cada uma das desigualdades a seguir:

   (a) $y \leq x^2$.
   (b) $x^2 + y^2 \geq 1$.
   (c) $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
   (d) $|x| + |y| \leq 1$.

2. Dados os pontos $A = (2, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (5, 3)$, obtenha as equações das retas mediatrizes dos segmentos AB e BC e determine as coordenadas da interseção dessas retas. A partir daí, ache a equação da circunferência que passa por A, B e C.

   Sugestão: Use o seguinte teorema: Sejam P, Q e R os três vértices de um triângulo. Temos as seguintes propriedades: (i) As mediatrizes dos três lados se encontram em apenas um ponto. (ii) Existe apenas uma circunferência que passa pelos pontos P, Q e R, e o centro dessa circunferência é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados.

3. Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$ e tem centro sobre o Eixo OY?

4. Escreva a equação da circunferência que tem centro no ponto $P = (2, 5)$ e é tangente à reta $y = 3x + 1$.

5. Fixado a, quais devem ser os dois valores de b para os quais a reta $y = ax + b$, de inclinação a, seja tangente à circunferência de centro O e raio r?

Aula 12

1. Completando os quadrados, decida se cada uma das equações listadas abaixo define uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio:

   (a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$.

   (b) $-x^2 - y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$.

   (c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$.

   (d) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$.

Aulas 14 e 15

1. Sejam AA', BB' e CC' segmentos de reta no plano. Suponha que AA' é equipolente a BB' e que BB' é equipolente a CC'. Prove que AA' e CC' são equipolentes.

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um parelelogramo se e somente se suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

3. Seja $T_v : \Pi \to \Pi$ a translação pelo vetor v no plano Π. Se $T_v(A) = A'$, $T_v(B) = B'$ e $T_v(C) = C'$, prove que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B'\hat{A}'C'$ têm a mesma medida.

Aula 16

1. Considere o triangulo ABC com vértices $A = (-8, 6)$, $B = (-8, 9)$ e $C = (-4, 6)$. Seja T_v a translação determinada pelo vetor $v = (9, -4)$. Determine os vértices A', B' e C' do transladado de ABC por v.

2. Considere os vetores $u = (3, -2)$, $v = (0, 1)$ e $w = (-1, 5)$. Calcule $2u - v + 3w$. Calcule a primeira coordenada de $3u - w$.

Aulas 17 e 18

1. O que você pode afirmar sobre o ângulo entre dois vetores que não são linearmente independentes?

2. Considere o vetor $v = (-2, 3)$. Dê um exemplo de vetor w tal que v e w sejam colineares? Dê um exemplo de w tal que v e w sejam linearmente independentes?

3. Exprima o vetor $w = (1, 1)$ como combinação linear de $u = (-2, 1)$ e $v = (1, -1)$.

4. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

5. Sejam u e v vetores quaisquer. Mostre que os vetores $|u|v$ e $|v|u$ têm o mesmo comprimento.

6. Mostre que se os vetores u e v têm o mesmo comprimento, então $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. E se $u + v$ e $u - v$ são ortogonais, u e v têm o mesmo comprimento?

7. Dado o paralelogramo $ABCD$, se $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, então $\overrightarrow{AD} = u+v$ e $\overrightarrow{BC} = v-u$. Prove que $|u-v|^2+|u+v|^2 = 2|u|^2+2|v|^2$. Conclua que em todo paralelogramo a soma dos quadrados das diagonais é iqual à soma dos quadrados dos quatro lados.

8. Prove as seguintes propriedades do comprimento de um vetor:

   (a) $|v| = 0$ se e somente se $v = 0$.

   (b) $|v + w| \leq |v| + |w|$.

   (c) $|tv| = |t||v|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   (d) $| - v| = |v|$.

9. Sejam A, B e C pontos do plano. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = |\overrightarrow{AB}|^2$.

   (b) As retas AB e BC são perpendiculares.

10. Dados os vetores u e v com $u \neq 0$. Prove que o vetor $w = v - \frac{\langle v,u \rangle}{\langle u,u \rangle} u$ é perpendicular a u.

11. Sejam u e v vetores não-colineares. Se um vetor w é tal que $\langle w, u \rangle = 0$ e $\langle w, v \rangle = 0$, mostre que $w = 0$.

Aula 19

1. Seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Prove que a reta cuja equação é $\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com a elipse. Essa reta é chamada a reta tangente à elipse no ponto P.

2. Quais são as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual à $1/2$?

3. Quais são as coordendas dos focos da elipse $4x^2 + 8y^2 = 12$?

Aula 20

1. Para todo ponto $P = (m, n)$ da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que a reta $\frac{m}{a^2}x - \frac{n}{b^2}y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com a hipérbole. Essa reta é chamada a reta tangente à hipérbole no ponto P.

2. Quais são as coordenadas dos focos da hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$?

3. Cada uma das equações a seguir representa o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas, ou um par de retas que se cortam na origem. Decida cada situação e determine as retas se for o caso.

   (a) $3x^2 - 5y^2 = 0$.

   (b) $3x^2 = 1$.

   (c) $5y^2 = -1$.

   (d) $3x^2 + 5y^2 = 0$.

   (e) $5y^2 = 0$.

4. O eixo de uma hipérbole mede 6 e seus focos situados no eixo OY são $F' = (0, -4)$ e $F = (0, 4)$. Qual é a equação dessa hipérbole?

5. Dizemos que uma reta é tangente a uma parábola quando elas têm um único ponto em comum e a reta não é paralela ao eixo OY. Prove que a reta $y = 7x - 3$ é tangente à parábola $y = x^2 + 3x + 1$ no ponto $(2, 11)$.

6. Determine α e β de modo que a reta $y = \alpha x + \beta$ seja tangente à parábola $y = x^2 - 2x + 5$ no ponto $(-1, 8)$.

7. Uma parábola de eixo vertical passa por $A = (-2, 19)$, $B = (3, 4)$ e $C = (5, 26)$.

   (a) Qual é a equação dessa parábola?

   (b) Como ficaria a resposta do item (a) se a ordenada de C fosse -2 em vez de 26?

Aulas 21 e 22

1. Uma mudança de eixos no plano manteve a origem fixa, enquando as coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ passaram a ser (a, b) e (c, d), respectivamente. Quais são as novas coordenadas do ponto $(2, 3)$?

2. Determine a translação de eixos que elimina os termos x e y na equação $9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y = 26$ e permite assim reconhecer a curva que ela representa.

3. Efetue uma rotação de -60^o nos eixos OX e OY e com isso identifique a curva $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy = 144$.

4. Efetue a rotação de eixos dada por $x = as - bt$ e $y = bs + at$ onde $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$. Como fica, nas novas coordenadas s e t, a equação da circunferência $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ (onde m e n são constantes dadas)?

Aula 23

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

   (a) Escreva sua matriz e sua equação característica.
   (b) Obtenha seus autovalores.
   (c) Descreva suas linhas de nível.
   (d) Calcule autovetores unitários u e v.
   (e) Ache os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$.
   (f) Determine os focos da cônica $A's^2 + C't^2 = 1$ em termos das coordenadas x e y.

   As formas quadráticas são as seguintes:

   (a) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
   (b) $\varphi(x, y) = xy$.
   (c) $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.
   (d) $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$.
   (e) $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$.
   (f) $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$.

Aula 25

1. Para cada uma das equações abaixo, identifique detalhadamente a curva que ela define e a mudança de coordenadas que permitiu essa conclusão.

   (a) $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 120x + 10y - 55 = 0$.
   (b) $17x^2 - 312xy + 108y^2 - 590x - 120y + 688 = 0$.
   (c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 171 = 0$.
   (d) $6x^2 - 5xy + y^2 - 17x + 7y + 8 = 0$.
   (e) $x^2 - xy + y^2 - 7x + 5y + 14 = 0$.
   (f) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 9x - 6y + 6 = 0$.

Aulas 26-28

1. Em cada um dos casos a seguir, determine a imagem do vetor v sob a rotação de ângulo θ em torno da origem.

   (a) $v = (2, -3)$ e $\theta = 90^o$.

   (b) $v = (-5, 2)$ e $\theta = 180^o$.

   (c) $v = (\sqrt{3}, 1)$ e $\theta = 30^o$.

2. Determine se a matrix
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$
pode ou não ser a matriz de uma rotação em torno da origem.

3. Determine a matriz da rotação que leva os vetores $(3, 4)$ e $(1, -2)$ nos vetores $(-4, 3)$ e $(2, 1)$, respectivamente.

4. Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem. Use as equações que fornecem as coordenadas de Rv para mostrar que $\langle Ru, Rv\rangle = \langle u, v\rangle$ para quaisquer u e v em $\mathbb{R}^2$.

5. Se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz de uma rotação em torno da origem, mostre que os vetores-coluna de M são unitários e ortogonais.

6. Determine os eixos da elipse que é a imagem da circunferência unitária por cada uma das seguintes transformações lineares:

   (a) $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$.

   (b) $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (4x + 6y, 6x + 9y)$. Mostre que todos os pontos da reta $2x + 3y = 1$ são transformados por T no mesmo ponto de $\mathbb{R}^2$. Qual é esse ponto?

8. Considere o quadrado $ABCD$ onde $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$. Considere a transformação $T(x, y) = (2x + 3y, 4x + 5y)$. Qual é a área do paralelogramo no qual é transformado $ABCD$ por T?

9. Dados $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$, $u' = (5, 6)$ e $v' = (7, 8)$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

10. Calcule os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

    (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Aula 29

1. Identifique geometricamente os seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z^2 + 2z = 3\}$.

   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

2. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P = (2, 3, 4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

3. Escreva a equação geral de um plano vertical.

Aula 30

1. Obtenha equações paramétricas para a reta AB nos seguintes casos:

   (a) $A = (2, 3, 4)$ e $B = (5, 6, 7)$.

   (b) $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$.

   (c) $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$.

2. Mostre que as equações paramétricas

   $$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 6t, \quad z = 3 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}$$

   e

   $$x' = 2 + s, \quad y' = 5 + 3s, \quad z' = 5 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}$$

   definem a mesma reta.

3. Prove que as retas dadas pelas equações paramétricas

   $$x = -2 + 2t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

   e

   $$x' = 1 + s, \quad y' = 2 - s, \quad z' = 3 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}$$

   não têm pontos em comum e não são paralelas. São, portanto, retas reversas.

4. Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$, determine o ponto de intersecção da reta AB com o plano Π_{xy}, com o plano Π_{xz} e com o plano Π_{yz}.

5. Considere os pontos $A = (3, 5, 2)$, $B = (-1, -1, 4)$ e $C = (2, 1, 5)$. Determine equações paramétricas para a reta paralela a AB que passa por C.

6. Escolhendo o sistema de eixos adequado, mostre que, dados dois pontos A e B e uma constante c, o conjunto dos pontos P do espaço tais que $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = c$ é um plano perpendicular à reta AB.

7. Determine a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ com o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Esboce geometricamente a situação.

Aula 31

1. Dados os vetores $w = (\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')$, $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, calcule os produtos internos $\langle u, w\rangle$ e $\langle v, w\rangle$. Qual relação entre u e v implica $w = 0$?

2. Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário com $abc \neq 0$. Considere os vetores $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct, -1/t)$. Determine o valor de t para que os vetores u, v e w sejam unitários e mutuamente ortogonais. A condição $abc \neq 0$ pode ser omitida?

3. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

4. Considere as retas $r_1 = \{A + sv \mid s \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{B + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$, onde A e B são pontos e v e w são vetores. Prove que $r_1 = r_2$ se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e w são múltiplos de v.

5. Sem usar coordenadas, explique o significado das seguintes afirmações: (a) os vetores u e v são ortogonais; (b) o vetor v é ortogonal à reta r; (c) o vetor v é ortogonal ao plano Π; (d) os vetores u e v são colineares; (e) os vetores u, v e w são coplanares.

6. Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores não coplanares. Se o vetor w é tal que $\langle w, v_1\rangle = 0$, $\langle w, v_2\rangle = 0$ e $\langle w, v_3\rangle = 0$, prove que $w = 0$.

Aula 32

1. Obtenha uma equação para o plano que contém P e é perpendicular ao segmento de reta AB nos seguintes casos:

   (a) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, -1, 2)$.

   (b) $P = (1, 1, -2)$, $A = (3, 5, 2)$ e $B = (7, 1, 12)$.

(c) $P = (3, 3, 3)$, $A = (2, 2, 2)$ e $B = (4, 4, 4)$.

(d) $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$.

2. Sejam $A = (3, 1, 3)$, $B = (5, 5, 5)$, $C = (5, 1, -2)$ e $D = (8, 3, -6)$. Mostre que as retas AB e CD são concorrentes e ache uma equação para o plano que as contém.

3. Sejam $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$ e $C = (1, 3, -2)$. Obtenha uma equação para o plano que contém a reta AB e o ponto C.

4. Supondo que $abc \neq 0$, escreva a equação do plano que corta os Eixos OX, OY e OZ nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$, respectivamente.

5. Qual é a equação do plano tangente, no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, à esfera com centro $A = (a, b, c)$ e raio r?

6. Ache as coordenadas do ponto do plano $2x + y - 2z = 12$ que está mais próximo da origem.

7. Sejam Π e Π' planos no espaço. Se Π e Π' são iguais ou concorrentes, a distância de Π a Π' é zero. Suponha que Π e Π' sejam paralelos. Então eles são descritos por equações $ax + by + cz = d$ e $ax + by + cz = d'$ com $d \neq d'$, respectivamente. Mostre que a distância entre Π e Π', denotada por $d(\Pi, \Pi')$, é dada por

$$d(\Pi, \Pi') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(Sugestão: Considere a reta que passa pela origem e é perpendicular aos planos.) Seja $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer no espaço, e seja $d(P_0, \Pi)$ a distância do ponto P_0 ao plano Π. Use a fórmula para $d(\Pi, \Pi')$ para provar que

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(Sugestão: Considere o plano paralelo a Π que passa por P_0.)

8. Qual é o ponto do plano $2x - 3y + z = 5$ mais próximo do ponto $P = (1, 3, 1)$?

9. Escreva as equações paramétricas da reta que passa por $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $x - 3y + 2z = 1$.

Aula 33

1. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

   (a)
   $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 3 \\ 4x - 2y + 10z &= 5 \end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned} 6x - 4y + 12z &= 2 \\ 9x - 6y + 18z &= 3 \end{aligned}$$

2. No sistema
   $$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \end{aligned}$$
   admitindo que se tem três incógnitas (ou seja, que pelo menos um dos vetores (a_1, a_2), (b_1, b_2) e (c_1, c_2) seja diferente de zero), mostre que se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ e $c_1d_2 - c_2d_1$, então existe $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = k_b1$, $c_2 = kc_1$ e $d_2 = kd_1$.

3. Sejam $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 2)$, $C = (4, 3, -1)$ e $D = (5, -15, 6)$. Mostre que os vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ são linearmente dependentes e ache a equação de um plano que contenha os pontos A, B, C e D.

4. No sistema a seguir, atribua sucessivamente valores aos parâmetros m e n de modo que as três equações representem um único plano, dois planos ou três planos:
   $$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= m \\ 3x - 6y - 9z &= n \\ -2x + 4y + 6z &= 1. \end{aligned}$$

5. Para quais valores de m e n o sistema a seguir possui solução?

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 3 \\ 3x + 3y + mz &= n \end{aligned}$$

6. Para cada um dos sistemas a seguir, decida em qual dos casos (primeiro a oitavo) discutidos no texto ele se enquadra. Determine também todas as soluções do sistema, se houver.

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 1 & 3x - 5y + 2z &= 2 \\ 4x - 3y + z &= 2 & 4x - 3y + z &= 1 \\ 2x - 7y + 3z &= 4 & 5x - 12y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 3 & 3x - 5y + 2z &= 4 \\ 4x - 3y + z &= 4 & 4x - 3y + z &= 3 \\ 6x - 10y + 4z &= 5 & 5x - 7y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Aulas 34 e 35

1. Resolva cada um dos sistemas a seguir:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 & x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 & x + 2y + 3z &= 1 \\ -x + y + z &= 1 & 2x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 & x - 3y + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 2 & x - 2y - z &= 1 \\ x + y + z &= 1 & 2x - 4y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

2. Aplique o processo de escalonamento a cada um dos sistemas a seguir e, a partir do resultado, identifique em qual dos oito casos da seção anterior o sistema se enquadra.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 & x - 2y + 2z &= 3 & 3x - y + 2z &= 5 \\ 3x - y + 2z &= 5 & 2x + y - z &= 4 & x - (1/3)y + (2/3)z &= 3 \\ 9x - 3y + 6z &= 16 & 2x - 4y + 4z &= 6 & 6x - 2y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 & 2x + y - 3z &= 1 & 3x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 3y - 6z &= 2 & 3x + 2y + z &= 2 & x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 2y - 4z &= 3 & x - 5z &= 1 & 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 2y + z &= 2 & 4x - 2y + 3z &= 2 \\ 3x + y + (1/2)z &= 1 & 3x + y - 2z &= 1 \\ 2x + (2/3)y + (1/3)z &= 2/3 & x + 7y - 12z &= -1 \end{aligned}$$

Aula 37

1. Calcule, se possível, o resultado das seguintes operações com matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 13 \end{bmatrix}$.

   (e) $\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

   (f) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Sejam

   $$m = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad m' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Determine as matrizes $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $v' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ tais que $mv = 0$ e $m'v' = 0$.

3. Sejam

   $$m = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Mostre que $m^2 = I$. Determine os números α e β tais que a matriz $p = \alpha m + \beta I$ cumpra $p^2 = p$ e seja não-nula. A partir daí, encontre uma matriz não-nula q tal que $pq = qp = 0$.

4. Sejam $m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva dois sistemas 2×2 para achar uma matriz $p = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ tal que $mp = I$.

5. Sejam

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad p = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule mp e pm. O que você observou?

Aulas 38 e 39

1. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 11 & 0 & 17 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D^T, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E^2.$$

2. Calcule o valor de x que satisfaz a equação

$$\det\left(\begin{bmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{bmatrix}\right) = 6.$$

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(AB)$, $\det(A)$ e $\det(B)$.

4. Calcule o determinante da matriz de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} m^2 & m & 1 \\ n^2 & n & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{bmatrix}.$$

Sem calcular o determinante, mostre diretamente que se m, n e p são três números distintos então a matriz acima tem posto 3 (isto é, suas linhas são linearmente independentes).

5. Sejam $A = (1, -1, 2)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (2, -1, 1)$. Calcule a área do paralelogramo que tem os segmentos AB e AC como lados.

Aula 40

1. Dados $u = (1, 1, 0)$, $v = (-1, 2, 1)$ e $w = (2, 0, -1)$.
   (a) Calcule $u \times v$ e $v \times w$.
   (b) Calcule $(u \times v) \times w$ e $u \times (v \times w)$.
   (c) O produto vetorial é uma operação associativa? Justifique sua resposta.
2. Ache um vetor unitário ortogonal a $u = (2, 1, 2)$ e $v = (1, 2, -1)$.
3. Sejam $u = (1, -2, 4)$, $v = (6, 1, -1)$ e $w = (-1, 2, 1)$. Determine $r = (x, y, z)$ tal que r seja ortogonal à w e obedeça a equação $u \times r = v$.
4. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (3, 1, 2)$.
5. Escreva sob a forma $ax + by + cz = d$ a equação do plano que passa pelo ponto $A = (-7, 2, 5)$ e é paralelo aos vetores $u = (3, 2, 4)$ e $v = (1, 0, 4)$.
6. Use o produto vetorial para obter as coordenadas do pé da perpendicular baixada do ponto $P = (1, 2, 3)$ sobre o plano que contém os pontos $A = (5, 6, 0)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (1, 0, 4)$.

Referências

[1] Serge Lang and Gene Murrow, *Geometry*, Second edition, Springer, 1980.

[2] Elon L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Segunda Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2015.

[3] Dorival A. de Mello e Renate G. Watanabe, *Vetores*, Segunda Edição, Livraria da Física, 2012.