Prova 1

MAT 105 - GAAL - Turma M
http://bit.ly/turma-m

12 de abril de 2017

1. (5 pontos) Determine à distância do ponto $P = (3,1)$ à reta $x + 2y = 6$.
2. (6 pontos) Sejam $A = (2,5)$, $B = (4,2)$, $C = (3,4)$ e $D = (a,2)$. Para qual valor de a as retas AB e CD são perpendiculares?
3. (7 pontos) Seja s a reta que passa pelo ponto $P = (5,-1)$ e é paralela à reta $-3x + 2y = 2$. Determine a equação da reta s na forma $y = ax + b$. Qual é o ponto de abcissa 2 na reta s?
4. (7 pontos) Determine os pontos que pertencem à reta $y = 2x - 1$ e estão situados à distância $\sqrt{2}$ da origem.

Fórmulas:

$$d(r', r) = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Solução

Questão 1. Aplicando a fórmula para a distância do ponto $P = (3,1)$ à reta $x + 2y = 6$ obtemos

$$d(P, r) = \frac{|1(3) + 2(1) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Questão 2. Observamos que

$$\text{reta } AB \perp \text{reta } CD$$

se e somente se

$$\text{segmento } AB \perp \text{segmento } CD$$

se e somente se

$$\begin{aligned}
(4-2)(a-3) + (2-5)(2-4) &= 0 \\
2(a-3) + (-3)(-2) &= 0 \\
2a - 6 + 6 &= 0 \\
2a &= 0 \\
a &= 0.
\end{aligned}$$

Questão 3. Como s é paralela à reta $-3x + 2y = 2$, uma equação para a reta s é $-3x + 2y = c$ para c tal que $P = (5,-1)$ pertença a s, ou seja, para c tal que 3 e 1 satisfaçam a equação de s. Substituindo as coordenadas de P na equação de s, obtemos $-3(5) + 2(-1) = -17$, ou seja, $c = -17$. Portanto uma equação para s é $-3x + 2y = -17$. Resolvendo para y, escrevemos essa equação na forma $y = ax + b$:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}.$$

O ponto de abcissa 2 que pertence à reta s tem ordenada $y = (3/2)2 - 17/2 = (6-17)/2 = -11/2$. Portanto, o ponto em s de abscissa 2 é

$$(2, -11/2).$$

Questão 4. Seja $P = (x, y)$. Se P pertence à reta dada e $d(P, O) = \sqrt{2}$, devemos ter $y = 2x - 1$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$, ou seja,

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na segunda obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + (2x-1)^2 &= 2 \\ x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 2 &= 0 \\ 5x^2 - 4x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

As soluções dessa equação são

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{4 \pm 6}{10} = \frac{2 \pm 3}{5} \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{5}.$$

Se $x = 1$, então $y = 2(1) - 1 = 1$. Se $x = -1/5$, então $y = 2(-1/5) - 1 = (-2 - 5)/5 = -7/5$. Portanto, os pontos procurados são

$$(1, 1) \qquad \text{e} \qquad \left(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right).$$