Prova 2

MAT 105 - GAAL - Turma M
http://bit.ly/turma-m

17 de maio de 2017

1. (5 pontos) Considere os vetores $u = (-3, 2)$ e $w = (1, 4)$. Calcule o comprimento de u, o produto interno de u e w, e o vetor $2u - 3w$.

2. (5 pontos) Exprima o vetor $w = (-3, 1)$ como combinação linear de $u = (-2, 1)$ e $v = (1, -1)$.

3. (6 pontos)

   (a) Sejam u e v vetores no plano. Prove que $|u - v|^2 + |u + v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.

   (b) Dado o paralelogramo $ABCD$, seja $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AD}$. Exprima $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ em função de u e v.

   (c) Tendo em mente o paralelogramo do item (b), qual é o significado geométrico da identidade do item (a)?

4. (4 pontos) Quais são os focos da elipse $6x^2 + 9y^2 = 12$?

5. (5 pontos) Sejam A, B e C pontos no plano. As seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = |\overrightarrow{AB}|^2$.

   (b) As retas AB e BC são perpendiculares.

   Prove que (a) implica (b).

Observação: Para qualquer vetor w, temos $|w|^2 = \langle w, w \rangle$.

Solução

Questão 1. Comprimento de u:

$$|u| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Produto interno de u e w:

$$\langle u, w \rangle = -3(1) + 2(4) = -3 + 8 = 5.$$

Vetor $2u - 3w$:

$$2u - 3w = 2(-3, 2) - 3(1, 4) = (-6, 4) + (-3, -12) = (-9, -8).$$

Questão 2. Procuramos números α e β tais que $w = \alpha u + \beta v$, ou seja,

$$(-3, 1) = \alpha(-2, 1) + \beta(1, -1) = (-2\alpha, \alpha) + (\beta, -\beta) = (-2\alpha + \beta, \alpha - \beta),$$

ou seja

$$-2\alpha + \beta = -3,$$
$$\alpha - \beta = 1.$$

Resolvendo esse sistema obtemos $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Portanto $w = 2u + v$.

Questão 3. (a) Calculamos

$$\begin{aligned}
|u - v|^2 + |u + v|^2 &= \langle u - v, u - v\rangle + \langle u + v, u + v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&\quad + \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= 2\langle u, u\rangle + 2\langle v, v\rangle \\
&= 2|u|^2 + 2|v|^2.
\end{aligned}$$

(b) Observamos que os segmentos orientados BC e AD são equipolentes e os segmentos orientados DC e AB são equipolentes. Logo $\overrightarrow{BC} = v$ e $\overrightarrow{DC} = u$. Calculamos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = v + u$$

e

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -u + v.$$

(c) A identidade do item (a) significa que

$$\begin{aligned}
d(B, D)^2 + d(A, C)^2 &= 2d(A, B)^2 + 2d(D, A)^2 \\
&= d(A, B)^2 + d(B, C)^2 + d(C, D)^2 + d(C, D)^2,
\end{aligned}$$

ou seja, ela expressa que a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados, em um paralelogramo.

Questão 4. Observamos que

$$6x^2 + 9y^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6x^2}{12} + \frac{9y^2}{12} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4/3} = 1.$$

Portanto $a^2 = 2$ e $b^2 = 4/3$. Logo $c^2 = a^2 - b^2 = 2 - 4/3 = 2/3$, ou seja, $c = \sqrt{2/3}$. Portanto os focos da elipse são

$$F' = (-c, 0) = (-\sqrt{2/3}, 0) \qquad \text{e} \qquad F = (c, 0) = (\sqrt{2/3}, 0).$$

Questão 5. Primeiramente, observamos que as retas AB e BC são perpendiculares se e somente se $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$ (ou seja, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são ortogonais). Portanto, é suficiente mostrar que (a) implica $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$. Suponha que (a) é verdadeiro. Observamos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ e calculamos

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}\rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle \\
&= \langle \overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB}\rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle \\
&= -\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle \\
&= -|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos (a) na penúltima igualdade. Portanto (a) implica (b).