Prova 3

MAT 105 - GAAL - Turma M
http://bit.ly/turma-m

14 de junho de 2017

1. (5 pontos) Considere a forma quadrática $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.
   (a) Escreva sua matriz e sua equação característica.
   (b) Obtenha seus autovalores.
   (c) Descreva suas linhas de nível.
   (d) Calcule autovetores unitários u e v.
2. (5 pontos) Dados $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$, $u' = (5, 6)$ e $v' = (7, 8)$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.
3. (5 pontos) Mostre que as equações paramétricas
$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 6t, \quad z = 3 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}$$
e
$$x' = 2 + s, \quad y' = 5 + 3s, \quad z' = 5 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}$$
definem a mesma reta.
4. (5 pontos) Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário com $abc \neq 0$. Considere os vetores $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct, -1/t)$. Determine o valor de t para que os vetores u, v e w sejam unitários e mutuamente ortogonais. A condição $abc \neq 0$ pode ser omitida?
5. (5 pontos) Sem usar coordenadas, explique o significado das seguintes afirmações:
   (a) Os vetores u e v são colineares.
   (b) Os vetores u, v e w são coplanares.

Solução

Questão 1. A matriz de φ é
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$
A equação característica de φ é $\lambda^2 - 10\lambda = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$. Os autovetores unitários correspondentes são
$$u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \qquad u^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$
Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis
$$x = \frac{3}{\sqrt{10}}s - \frac{1}{\sqrt{10}}t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}s + \frac{3}{\sqrt{10}}t,$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s,t) = 10t^2.$$

Para $d < 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o conjunto vazio. Para $d = 0$, a linha de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ é a reta horizontal $t = 0$ (no sistema OST). Para $d > 0$, as linhas de nível $\overline{\varphi}(s,t) = d$ são o par de retas horizontais $t = \pm\sqrt{d/10}$ (no sistema OST).

Questão 2. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem a forma $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Procuramos constantes a, b, c e d tais que $T(1,2) = (5,6)$ e $T(3,4) = (7,8)$, ou seja, $(a+2b, c+2d) = (5,6)$ e $(3a+4b, 3c+4d) = (7,8)$, ou seja, $a+2b = 5$, $c+2d = 6$ e $3a+4b = 7$, $3c+4d = 8$. Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, a, b, c e d. De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 \qquad & c + 2d &= 6 \\ 3a + 4b &= 7 \qquad & 3c + 4d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = 5$. Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x,y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

Questão 3. É suficiente mostrar que, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe apenas um $s \in \mathbb{R}$ tal que $x' = x$, $y' = y$ e $z' = z$, ou seja,

$$\begin{aligned} 2 + s &= 1 + 2t, \\ 5 + 3s &= 2 + 6t, \\ 5 + 2s &= 3 + 4t. \end{aligned}$$

Cada uma dessas equações implica $s = -1 + 2t$. Portanto, o sistema tem solução única para todo t. Isso mostra que as duas equações paramétricas definem a mesma reta.

Questão 4. Para que os vetores u, v e w sejam mutuamente ortogonais, é necessário e suficiente que $\langle u, v\rangle = 0$, $\langle u, w\rangle = 0$ e $\langle v, w\rangle = 0$. Observamos que

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= 0, \\ \langle v, w\rangle &= 0, \\ \langle u, w\rangle &= c(a^2 + b^2)t - c/t. \end{aligned}$$

Logo, para que os vetores sejam mutuamente ortogonais, é necessário e suficiente que $c(a^2+b^2)t - c/t = 0$, ou seja, $(a^2 + b^2)t^2 - 1 = 0$ (onde usamos que $t \neq 0$ e $c \neq 0$), ou seja,

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Agora, como u é unitário, temos que $|u|^2 = 1$, ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Além disso, usando os valores obtidos para t, obtemos $|v|^2 = (a^2+b^2)t^2 = 1$ e $|w|^2 = (a^2+b^2)t^2c^2 + 1/t^2 = c^2 + 1/t^2 = a^2+b^2+c^2 = 1$. Portanto, para os valores de t obtidos acima, os vetores u, v e w são unitários e mutuamente ortogonais. A condição $abc \neq 0$ é desnecessária, basta que $a^2 + b^2 \neq 0$.

Questão 5. (a) Se os vetores u e v são colineares, então quando representamos os dois vetores usando o mesmo ponto inicial, os três pontos obtidos são colineares, ou seja, quando escrevemos $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, os pontos A, B e C são colineares (ou seja, pertencem à mesma reta). (b) Se os vetores u, v e w são coplanares, então quando representamos os três vetores usando o mesmo ponto inicial, os quatro pontos obtidos são coplanares, ou seja, quando escrevemos $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$, os pontos A, B, C e D são coplanares (ou seja, pertencem ao mesmo plano).