Prova 1

MAT 038 - GAAL - Turma B2
http://bit.ly/gaal-2018-tb2

11 de setembro de 2018

1. (20 pontos) Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. (20 pontos) Calcule, caso exista, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (20 pontos) Considere o sistema de equações elementares $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a^2 - 6 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ b+6 \end{bmatrix},$$

onde a, b e c são parâmetros reais quaisquer. Descubra para quais valores dos parâmetros o sistema possui respectivamente solução única, infinitas soluções e nenhum solução.

4. (20 pontos) Leia com atenção as afirmativas abaixo:

   I Se A e B são matrizes quadradas e $\det(AB) = 0$, então A não é invertível ou B não é invertível.

   II Um sistema linear homogêneo com 4 equações e 5 incógnitas possui infinitas soluções.

   III Seja A uma matriz quadrada. Se o sistema homogêneo $AX = B$ não possui solução, então o sistema homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial.

   Escolha qual das alternativas a seguir é a única que se aplica às Afirmações I, II e III.

4' (20 pontos) Leia com atenção as afirmativas abaixo:

   I Se A é uma matriz quadrada e $\det(A^T A) = 0$, então A não é invertível.

   II Um sistema linear homogêneo com 5 equações e 4 incógnitas possui somente a solução trivial.

   III Seja A uma matriz quadrada. Se o sistema homogêneo $AX = B$ possui infinitas soluções, então o sistema homogêneo $AX = 0$ também possui infinitas soluções.

   Escolha qual das alternativas a seguir é a única que se aplica às Afirmações I, II e III.

5. (20 pontos) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das matrizes acima, as que são equivalentes por linha a uma matriz identidade são:

5' (20 pontos) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das matrizes acima, as que são equivalentes por linha a uma matriz identidade são:

Solução

1. Efetuando sobre a matriz A as operações elementares sobre linhas $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$ e $L_4 \leftarrow -3L_3$, obtemos a matriz

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como A_4 é uma matriz triangular, temos que $\det(A_4) = (1)(1)(-1)(0) = 0$. Observamos que as operações elementares utilizadas não alteram o valor do determinante. Portanto $\det(A) = \det(A_4) = 0$.

2. Formamos a matriz $[A|I]$ e aplicamos o método de eliminação de Gauss-Jordan para transformar essa matriz em uma matriz na forma escalonada reduzida. Efetuando as operações elementares sobre linhas $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$, $L_3 \leftarrow (-1)L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, $L_1 \leftarrow L_2 + 3L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, obtemos a matriz $[I|A^{-1}]$ onde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -8 \\ -7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Consideramos a matriz completa do sistema:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & a^2-6 & b+6 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz com as operações elementares $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_2 + L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & b+6 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos de baixo para cima o sistema de equações correspondente. É suficiente analisar o que ocorre com a última equação. Portanto:

- Se $a = \pm 3$ e $b \neq -6$, o sistema não possui solução.
- Se $a = \pm 3$ e $b = -6$, o sistema possui infinitas soluções.
- Se $a \neq \pm 3$, o sistema possui uma única solução.

4 e 4'. Apresentamos a solução da Questão 4. A solução da Questão 4' é semelhante.

Se $\det(AB) = 0$, então $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$ pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Logo a matriz A não é invertível ou a matriz B não é invertível pois uma matriz não é invertível se e somente se seu determinante é igual a zero.

Por um teorema que vimos em aula, um sistema de equações homogêneas com mais incógnitas do que equações sempre possui um número infinito de soluções. Por outro lado, dado um sistema com mais equações do que incógnitas, só podemos afirmar que esse sistema possui a solução trivial (pode ocorrer que ele tem apenas essa solução ou eventualmente um número infinito de soluções).

Um sistema $AX = B$ possui apenas uma solução se e somente se A é invertível. Nesse caso, o sistema $AX = 0$ possui apenas a solução trivial. Logo, se $AX = B$ não tem soluções ou tem infinitas soluções, então A não é invertível. Nesse caso $AX = 0$ tem infinitas soluções.

5 e 5. Uma matriz é equivalente por linhas à matriz identidade se e somente se ela é invertível, o que ocorre se e somente se seu determinante não é igual a zero. Portanto, para decidir se uma matriz é equivalente à matriz identidade, basta calcular seu determinante ou sua inversa.