Prova 2

MAT 038 - GAAL - Turma B2
http://bit.ly/gaal-2018-tb2

26 de outubro de 2018

1. (20 pontos)
   (a) Encontre o ponto do plano $\pi : x + y - z = 0$ mais próximo do ponto $X = (0, -1, 5)$.
   (b) Encontre o ponto Y tal que X e Y estejam em posições simétricas em relação ao plano π.
2. (20 pontos)
   (a) Encontre os cossenos dos três ângulos internos do triângulo com vértices $A = (1, 0, -2)$, $B = (-2, 1, 0)$ e $C = (1, 1, -1)$.
   (b) O triângulo ABC possui algum ângulo reto ou obtuso? Se sim, em qual vértice?
3. (20 pontos) Um vetor v é perpendicular a $(1, -2, -3)$ e a $(0, 1, 1)$, faz ângulo agudo com $\vec{k}$ e possui norma igual a 1. Quanto vale a some das componentes de v?
4. (20 pontos) Sejam v_1 e v_2 dois vetores unitários na direção da reta de interseção dos planos $x - 2y + 2z = 1$ e $3y - 2z = 0$. Quanto vale a soma das coordenadas de um desses vetores?
5. (20 pontos) Considere as retas $r_1 : (x, y, z) = (1+2t, 2-t, 3+t)$, $r_2 : (x, y, z) = (-2+s, 5+s, -s)$ e r_3 a reta que passa pelos pontos $A = (-1, 1, 3)$ e $B = (2, 7, 0)$. Quais são as posições relativas de r_1 e r_2 e r_1 e r_3?

Solução

1. (a) Um vetor normal do plano é $N = (1, 1, -1)$. Seja r a reta perpendicular ao plano que passa pelo ponto X. Então $r : (x, y, z) = (t, -1 + t, 5 - t)$. A reta r intersecta o plano π se

$$t + (-1 + t) - (5 - t) = 0,$$

ou seja $t = 2$. O ponto correspondente é $P = (2, 1, 3)$.

(b) Temos que $\overrightarrow{PX} = (-2, -2, 2)$. Procuramos $Y = (x, y, z)$ tal que $\overrightarrow{PY} = -\overrightarrow{PX}$, ou seja,

$$(x - 2, y - 1, z - 3) = (2, 2, -2).$$

Logo $x = 4$, $y = 3$ e $z = 1$. Portanto $Y = (4, 3, 1)$.

2. (a) Calculamos $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{BC} = (3, 0, -1)$. Sejam α, β e γ os ângulos correspondentes aos vértices A, B e C, respectivamente. Temos

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{3}{8}\sqrt{28},$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{11}{70}\sqrt{35},$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|} = -\frac{1}{10}\sqrt{5}.$$

(b) O triângulo possui um ângulo obtuso no vértice C pois $\cos\gamma < 0$.

3. Seja $v = (x, y, z)$. Sabemos que $v \cdot (1, -2, -3)$, $v \cdot (0, 1, 1)$ e $v \cdot \vec{k} > 0$ e $\|v\| = 1$. Isso implica $x - 2y - 3z = 0$, $y + z = 0$ e $z > 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Resolvendo essas equações obtemos $v = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Logo $\sum_{j=1}^{3} v_j = 1/\sqrt{3}$.

4. Observamos que

$$v_1 = \frac{N_1 \times N_2}{\|N_1 \times N_2\|} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{N_2 \times N_1}{\|N_2 \times N_2\|}$$

onde $N_1 = (1, -2, 2)$ e $N_2 = (0, 3, -2)$ são vetores normais dos planos π_1 e π_2, respectivamente. Calculamos $N_1 \times N_2 = (-2, 2, 3)$ e $\|N_1 \times N_2\| = \sqrt{17}$. Logo $v_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2, 2, 3)$ e $v_2 \frac{1}{\sqrt{17}}(2, -2, -3)$. Portanto $\sum_{j=1}^{3}(v_1)_j = 3/\sqrt{17}$ e $\sum_{j=1}^{3}(v_2)_j = -3/\sqrt{17}$

5. Primeiramente, calculamos as equações de r_3. Temos $\overrightarrow{AB} = (3, 6, -3)$, logo $r_3 : (x, y, z) = (-1+3p, 1+6p, 3-3p)$. Os vetores diretores das retas são $V_1 = (2, -1, 2)$, $V_2 = (1, 1, -1)$ e $V_3 = (3, 6, -3)$. Os pontos $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (-2, 5, 0)$ e $P_3 = (-1, 1, 3)$ estão situados sobre as retas, respectivamente. Calculamos $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 3, -3)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, -1, 0)$.

Calculamos $|(V_1 \times V_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}| = 0$. Logo r_1 e r_2 são coplanares. Todavia $V_1 \times V_2 = (0, 3, 3) \neq (0, 0, 0)$. Portanto r_1 e r_2 são concorrentes.

Calculamos $|(V_1 \times V_3) \cdot \overrightarrow{P_1P_3}| = 7$. Logo r_1 e r_3 não são coplanares, ou seja são reversas.