Prova 3

MAT 038 - GAAL - Turma B2
http://bit.ly/gaal-2018-tb2

27 de novembro de 2018

1. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Qual é a dimensão do subespaço das soluções do sistema homogêneo $AX = 0$? Exiba uma base para o subespaço cuja dimensão você calculou.

2. Considere os vetores e conjuntos $v_1 = (1, -3, 2)$, $v_2 = (1, 2, 4)$, $v_3 = (-1, 2, 3)$, $v_4 = (4, -7, 10)$, $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B = \{v_1, v_2, v_4\}$. Considere também o vetor $w = (-5, -15, -22)$. Então é verdade que:
   (a) w é combinação linear dos elementos de B e qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos elementos de A.
   (b) w não é combinação linear dos elementos de B e qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos elementos de A.
   (c) w não é combinação linear dos elementos de A e qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos elementos de B.
   (d) w é combinação linear dos elementos de A e qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos elementos de B.
   (e) w não é combinação linear dos elementos de A nem dos de B.

3. Considere as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
Decida se cada uma dessas matrizes é diagonalizável ou não.

4. Obtenha uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $w_1 = (0, 1, 1)$, $w_2 = (0, 2, 2)$ e $w_3 = (1, 2, 3)$.

Solução

1. Basta escalonar a matriz completa do sistema e encontrar vetores geradores para o conjunto solução. Os vetores obtidos através do escalonamento são linearmente independentes, logo formam uma base. O número de vetores da base é igual à dimensão do subespaço.

2. Usando o teste do determinante, verifique primeiro se os conjuntos A e B são linearmente independentes. Um conjunto linearmente independente de três vetores gera o espaço $\mathbb{R}^3$, em particular o vetor w. Um conjunto X linearmente dependente de três vetores gera o vetor w se a equação $xu + yv + zq = w$ tem solução, onde u, v e q são os vetores do conjunto X.

3. Verifique se a matriz $n \times n$ possui n autovalores distintos ou se a união das bases dos autoespaços tem n elementos. Em ambos os casos a matriz é diagonalizável.

4. Verifique que o conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ é linearmente dependente (de fato, $w_2 = 2w_1$). Ignore o vetor w_2. Claramente o conjunto $\{w_1, w_3\}$ é linearmente independente e gera o subespaço, logo é uma base. Defina $v_1 = w_2$ e $v_2 = w_3 - \mathrm{proj}_{v_1} w_3$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal.