Comentários
Geometria Espacial
MAT 050

Primeiro período de 2018

1 Exemplo 2.4

Suponha inicialmente que o quadrilátero $ABCD$ é convexo, como na figura 2.5. Seja O o ponto de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Esse ponto existe, conforme o teorema a seguir.

Teorema. As diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam.

Se o quadrilátero $ABCD$ não é necessariamente convexo, seja O o ponto de intersecção das retas que contém, respectivamente, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Esse ponto existe, conforme o seguinte teorema.

Teorema. As retas que contém as diagonais de um quadrilátero sempre se intersectam.

2 Seção 3.1

Na construção de um paralelepípedo $ABCDEFGH$, obtemos os pontos F, G e H e traçamos os segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HE}$. Afirmamos que esses segmentos são coplanares, pelos seguintes motivos. Primeiro, tendo em vista o teorema a seguir, observamos que $ABFE$ e $CDHG$ são paralelogramos, pois $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ são congruentes e paralelos por construção, e $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são congruentes e paralelos por construção.

Teorema. Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo por construção. Logo $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{AB}$ que é paralelo a $\overline{DC}$ que é paralelo a $\overline{HG}$. Portanto $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{HG}$. Assim $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ estão contidos no mesmo plano. Logo $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ estão contidos no mesmo plano que $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ (usando o Teorema 2.1).

Afirmamos que o paralelepípedo ilustra a existência de retas reversas: As retas definidas pelas arestas $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$ são reversas. De fato, os pontos ABC definem um único plano α. A reta BC está contida em α (pelo Teorema 2.1). O ponto E não pertence ao plano α, por hipótese. Suponha que a reta

AE está contida em α. Então E pertence à α, o que é impossível. Logo a reta AE não pode estar contida no plano α. Consequentemente as retas AE e BC estão contidas em planos distintos e portanto são reversas.

3 Teorema 3.3

Na demonstração do Teorema 3.3, afirmamos que os quadriláteros AA_1B_1B, AA_2B_2B e $A_1B_1B_2A_2$ são paralelogramos. Os dois primeiros quadriláteros são paralelogramos por construção (são quadriláteros cujos lados opostos são paralelos). Tendo em vista o teorema a seguir, concluímos que $\overline{A_2B_2} = \overline{AB}$ e $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$. Quanto ao quadrilátero $A_1B_1B_2A_2$, observamos que $\overline{A_1B_1}$ é paralelo a $\overline{A_2B_2}$, pois $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{AB}$ são paralelos e $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{AB}$ são paralelos. Portanto $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos e congruentes. Logo $A_1B_1B_2A_2$ é um paralelogramo, pelo teorema a seguir.

Teorema. Em um paralelogramo, lados opostos são congruentes.

Teorema. Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

4 Teorema 5.2

Na demonstração do Teorema 5.2, obtemos uma reta r paralela ao plano α, e tomamos uma reta s em α não paralela à r. Por que s existe? Pelo Teorema 4.1, existe uma reta u paralela à r contida em α. Da geometria plana, sabemos que a reta u divide o plano α em dois semiplanos. Sejam A e B pontos em cada um desses semiplanos, respectivamente. Então a reta AB corta a reta u, logo são concorrentes. Portanto a reta AB está contida em α e não é paralela a r (se fosse, seria paralela a u por transitividade, o que é impossível).

Seja β o plano que passa por um ponto A e é paralelo a um plano α. Mostre que β contém todas as paralelas a α que passam por A (veja o último parágrafo da página 32 de [1]).

5 Construção de pirâmides

Para definir uma transformação de semelhança entre as pirâmides, usamos o seguinte fato: Dado P na pirâmide $VA_1A_2 \cdots A_n$, seja P' o ponto sobre VP tal que $\overline{VP'}/\overline{VP} = k$. O ponto P' pertence à pirâmide $VB_1B_2 \cdots B_n$. Exercício: Prove essa afirmação.

Referências

[1] Paulo Cezar Pinto Carvalho, *Introdução à Geometria Espacial*, Quarta Edição, Coleção do Professor de Matemática, IMPA, 2005.