Lista de Exercícios – Parte II
Geometria Espacial
MAT 050

Primeiro Período de 2018

A lista de exercícios a seguir contém exercícios de [1], [2], [3] e outras referências.

Poliedros

1. Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares. Determine os números de faces de cada gênero.

2. Descreva todos os poliedros que possuem 10 arestas.

   Os exercícios a seguir tratam de grafos. Nos dois primeiros, pode-se utilizar o caso plano da relação de Euler. Os três últimos dependem apenas do seu raciocínio.

3. Veja o mapa da América do Sul. Existem 13 países mais o oceano, que também consideramos um "país". Observa-se que não existe nenhum ponto que pertença a mais de 3 países. Quantas linhas de fronteira existem na América do Sul?

4. Na figura abaixo, as casas 1, 2 e 3 devem ser conectadas aos terminais de água (A), luz (L) e telefone (T). É possível fazer essas ligações sem que duas conexões se cruzem?

   1 2 3
   A L T

5. A cidade de Königsberg está situada nas margens do Mar Báltico, na foz do rio Pregel. No rio, existem duas ilhas ligadas às margens e uma à outra por sete pontes (veja a Figura 10.16 em [2]). O povo, que passeava dando voltas por estas ilhas, descobriu que, partindo da

margem sul do rio, não conseguia planejar um trajeto de modo a cruzar cada uma das pontes uma única vez (ou seja, passar por todas elas exatamente uma vez por cada). Explique porque isso não é possível.

6. Veja a Figura 10.17 em [2]. Verifique se o desenho nessa figura pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar por cima de uma linha já traçada.

Volumes e Áreas

1. Determine o volume do maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo de aresta a.

2. (a) Mostre que a soma das distâncias de um ponto interior a um tetraedro regular às suas faces é constante. (b) A partir do item (a), calcule o raio da esfera inscrita a um tetraedro regular de aresta a.

3. Uma pirâmide é dita ser regular quando a sua base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre o plano da base é o seu centro.

   Uma pirâmide regular de altura 4cm tem por base um quadrado de lado 6cm. Calcule seu volume, sua área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

4. Um cilindro reto possui uma esfera inscrita. Mostre que a razão entre as áreas desses dois sólidos é igual à razão entre seus volumes (Teorema de Arquimedes).

5. Se dois sólidos são semelhantes com razão de semelhança r, então a razão entre seus volumes é r^3. (Sugestão: Considere primeiro casos particulares em que o sólido é um paralelepípedo reto, um prisma, uma pirâmide, um cilindro, um cone e uma esfera.)

6. Dadas as semi-retas não coplanares OX, OY e OZ, com a mesma origem O, seja $V(x, y, z)$ o volume da pirâmide de vértice O cuja base é o triângulo XYZ com $\overline{OX} = x$, $\overline{OY} = y$ e $\overline{OZ} = z$. Prove que $V(x, y, z)$ é diretamente proporcional a x, y e z e conclua que

$$\frac{V(x, y, z)}{V(x', y', z')} = \frac{xyz}{x'y'z'}.$$

7. O paraboloide de revolução de altura h é o sólido gerado pela rotação do segmento de altura h da parábola $z = y^2$ (situada no plano OYZ) em torno do eixo vertical OZ (veja a Figura 4.21). Em termos das coordenadas cartesianas (x, y, z) esse paraboloide é o conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem as condições $x^2 + y^2 \leq z \leq h$.

Observe que cada plano horizontal $z = c$ com $c > 0$ intersecta o paraboloide segundo um círculo de raio $\sqrt{z}$. Considere um prisma de altura π, que tem por base o triângulo retângulo isósceles, no plano OYZ, cujos vértices são os pontos O, $(0, 0, h)$ e $(0, h, h)$. Use o Princípio de Cavalieri para concluir que o volume do paraboloide é igual a $\pi h^2/2$.

8. Considere uma pirâmide $V{-}ABCD$ em que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado. Suponha que todas as arestas da pirâmide têm comprimento igual a 4. Sejam M, N e P os pontos situados nas arestas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ tais que $\overline{VM}$, $\overline{VN}$ e $\overline{VP}$ têm comprimentos iguais a 1, 2 e 3, respectivamente. Seja Q o ponto de intersecção do plano MNP com a aresta $\overline{VD}$.

   (a) Qual é o comprimento do segmento $\overline{VQ}$?

   (b) Qual é o volume da pirâmide V-$MNPQ$?

Referências

[1] Paulo Cezar Pinto Carvalho, *Introdução à Geometria Espacial*, Quarta Edição, Coleção do Professor de Matemática, IMPA, 2005.

[2] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado, *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2*, Sétima Edição, Coleção do Professor de Matemática, IMPA, 2016.

[3] Elon Lages Lima, *Medida e Forma em Geometria*, Quarta Edição, Coleção do Professor de Matemática, IMPA, 2011.