Lista de Exercícios
Geometria Espacial
MAT 050

Primeiro período de 2018

A lista de exercícios a seguir contém exercícios de [1] e de outras referências.

1 Propriedades básicas

1. (2.1 de [1]) Quantos são os planos determinados por quatro pontos não coplanares?

2. (2.2 de [1]) Considere um conjunto de pelo menos três retas distintas. Mostre que se quaisquer duas dessas retas são concorrentes, então elas estão todas num mesmo plano ou passam todas pelo mesmo ponto.

3. (2.3 de [1]) Seja F uma figura tal que quaisquer quatro de seus pontos sejam coplanares. Mostre que F é plana, isto é, está contida em um plano.

4. (2.4 de [1]) Duas retas r e s são concorrentes em um ponto O. Fora do plano determinado por r e s tomamos um ponto P qualquer. Qual é a intersecção do plano definido por r e P com o plano definido por s e P?

5. (2.5 de [1]) Dois triângulos ABC e DEF, situados em planos distintos, são tais que as retas AB, AC e BC encontram as retas DE, DF e EF nos pontos M, N e P, respectivamente. Mostre que M, N e P são colineares.

6. (2.6 de [1]) Suponha que em lugar do Postulado 5 (segundo o qual a intersecção de dois planos não pode ser um único ponto) tivéssemos adotado a propriedade da separação do espaço por um plano, isto é, tivéssemos adotado o seguinte postulado:

   Postulado 5'. *Um plano divide os pontos que lhe são exteriores em dois conjuntos, chamados semi-espaços, de forma que um segmento* *com extremos no mesmo semi-espaço não corta o plano e um segmento com extremos em semi-espaços diferentes corta o plano.*

Usando os Postulados 1, 2, 3, 4 e 5', mostre que a intersecção de dois planos não pode ser um único ponto. (Isso mostra que substituindo 5 por 5' obtemos um sistema equivalente de postulados.)

7. (2.7 de [1]) Um conjunto F de pontos do espaço é chamado convexo quando dado pontos A e B em F o segmento AB está contido em F. Indique quais dos seguintes conjuntos são convexos:
   (a) Um plano.
   (b) Um semi-espaço.
   (c) Os pontos interiores a uma pirâmide.
   (d) Os pontos interiores a um tetraedro.

8. (2.8 de [1]) Considere uma pirâmide quadrangular V-$ABCD$. Sejam M, N e P pontos das arestas laterais $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$, respectivamente. O plano determinado por M, N e P corta a aresta $\overline{VD}$ em um ponto Q. Diga como Q pode ser obtido a partir de M, N e P.

   (Sugestão: Considere os pontos de intersecção das diagonais dos quadriláteros $ABCD$ e $MNPQ$.)

2 Paralelismo de retas

1. (3.1 de [1]) Mostre que duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

2. (3.2 de [1]) É verdade que duas retas distintas ortogonais a uma terceira são sempre paralelas entre si?

3. (3.3 de [1]) Seja r uma reta qualquer e s uma reta não paralela a r. Mostre que todas as retas paralelas a s e concorrentes com r estão contidas no mesmo plano.

4. (3.4 de [1]) Sejam A, B, C e D pontos quaisquer do espaço (não necessariamente coplanares). Sejam M, N, P e Q pontos médios $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivamente. Mostre que $MNPQ$ é um paralelogramo.

5. (3.5 de [1]) Mostre que os três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro qualquer $ABCD$ se encontram em um mesmo ponto.

6. (3.6 de [1]) Sejam r e s duas retas reversas. Sejam A e B pontos distintos de r, e sejam C e D pontos distintos de s. Mostre que as retas AC e BD são reversas.

7. (3.7 de [1]) Sejam r e s duas retas reversas, seja A um ponto em r, e seja B um ponto em s. Qual é a intersecção do plano α definido por r e B com o plano β definido por s e A?

3 Paralelismo de reta e plano

1. (4.1 de [1]) Mostre que se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à reta de intersecção dos dois planos.

2. (4.2 de [1]) Suponha que os planos α, β e γ têm exatamente um ponto em comum. Mostre que não existe nenhuma reta simultaneamente paralela a α, β e γ.

3. (4.3 de [1]) Sejam r e s duas retas reversas. Construa um plano contendo r e paralelo a s.

4. (4.4 de [1]) Construa por um ponto A um plano paralelo a duas retas não paralelas r e s.

5. (4.5 de [1]) Sejam r e s retas reversas e P um ponto do espaço. Construa uma reta passando por P e se apoiando em r e s. Considere as diversas situações possíveis.

6. (4.6 de [1]) Dadas três retas r, s e t, reversas duas a duas, construa uma reta paralela a t que se apoia em r e s. Mostre que a solução é única.

7. (4.7 de [1]) Seja $ABCD$ um paralelogramo. Pelos vértices A, B, C e D são traçadas retas paralelas entre si. Um plano α corta estas retas em pontos A', B', C' e D', situados no mesmo semi-espaço relativo ao plano de $ABCD$, de modo que $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$, $\overline{CC'} = c$ e $\overline{DD'} = d$. Mostre que $a + c = b + d$.

4 Paralelismo de planos

1. (5.1 de [1]) Sejam α, β e γ três planos distintos. Mostre que as posições relativas possíveis dos planos são:

   (a) Os três planos são paralelos.

   (b) Dois deles são paralelos e o terceiro é secante a ambos, cortando-os segundo retas paralelas.

   (c) Os três planos se cortam segundo uma reta.

   (d) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas paralelas.

(e) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas concorrentes; o ponto comum às três retas é o único ponto comum aos três planos.

2. (5.2 de [1]) Seja r uma reta secante a um plano α e P um ponto exterior a α. Mostre que existe uma única reta que passa por P, encontra r e é paralela a α.

3. (5.3 de [1]) Sejam r e s duas retas reversas. Construa um par de planos paralelos contendo r e s, respectivamente.

4. (5.4 de [1]) Por um ponto qualquer da aresta $\overline{AB}$ de um tetraedro qualquer $ABCD$ é traçado um plano paralelo às arestas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Mostre que a seção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo.

5. (5.5 de [1]) Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo tal que $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AE} = 6$. Estude as seções determinadas neste paralelepípedo pelos planos definidos pelos ternos de pontos (M, N, P) abaixo:

   (a) $M = N$, onde N é o ponto médio de $\overline{CG}$ e P é o ponto médio de $\overline{DH}$.

   (b) $M = A$, $N = C$ e P é o ponto médio de $\overline{FG}$.

   (c) $M = A$, N é o ponto médio de $\overline{CG}$ e P é o ponto médio de $\overline{FG}$.

   (d) N é o ponto médio de $\overline{AE}$, N é o ponto médio de $\overline{BC}$ e P é o ponto médio de $\overline{GH}$.

6. Seja β o plano que passa por um ponto A e é paralelo a um plano α. Mostre que β contém todas as paralelas a α que passam por A (veja o último parágrafo da página 32 de [1]).

5 Planos paralelos e proporcionalidade

1. (6.1 de [1]) Seja P um ponto exterior a um plano α. Para cada ponto Q de α, seja X o ponto do segmento $\overline{PQ}$ que o divide na razão

$$\frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}} = k.$$

   Qual é o lugar geométrico do ponto X quando Q percorre o plano α?

2. (6.2 de [1]) Considere duas retas r e s. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão nas retas r e s? Examine todas as possíveis posições relativas de r e s.

3. (6.3 de [1]) Considere uma reta r e um plano α. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão em r e α? Examine todas as possíveis posições relativas de r e α.

4. (6.4 de [1]) Dada uma reta r secante ao plano α e um ponto P exterior a r e a α, construir um segmento cujos extremos estão em r e α cujo ponto médio seja P.

5. (6.5 de [1]) Dadas as retas reversas duas a duas r, s e t, encontrar uma reta que as encontre nos pontos R, S e T, respectivamente, de modo que S seja ponto médio de $\overline{RT}$.

6. (6.6 de [1]) Mostre que dois poliedros homotéticos possuem faces respectivamente paralelas.

7. (6.7 de [1]) Verifique, através de um exemplo, que dois poliedros com arestas respectivamente proporcionais não são necessariamente semelhantes. Mostre, porém, que dois tetraedros de arestas respectivamente proporcionais são semelhantes.

8. (6.8 de [1]) Seja um tetraedro qualquer, no qual A', B', C' e D' são os baricentros das faces opostas aos vértices A, B, C e D.

   (a) Mostre que as arestas AA' e BB' são concorrentes.

   (b) Mostre que o ponto G comum a AA' e BB' é tal que

   $$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}} = \frac{1}{3}.$$

   (c) Conclua que as quatro retas AA', BB', CC' e DD' se encontram no ponto A.

   (d) Prove que o tetraedro $A'B'C'D'$ é homotético ao tetraedro $ABCD$. Qual é o centro de homotetia? Qual é a razão da homotetia?

6 Perpendicularismo de reta e plano

1. (7.1 de [1]) Demonstre as seguintes propriedades:

   (a) Seja r uma reta perpendicular ao plano α. Toda reta paralela a r é perpendicular a α. Todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

   (b) Dois planos distintos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.

2. (7.2 de [1]) Mostre que por um ponto dado se pode traçar uma única reta ortogonal a duas retas não paralelas dadas.

3. (7.3 de [1]) Demonstre o Teorema das Três Perpendiculares: Sejam A, B e C pontos não colineares. Se as retas AB e AC são ortogonais à reta r, então BC também é ortogonal a r.

4. (7.4 de [1]) Dois triângulos ABC e BCD são retângulos em B. Mostre que se o cateto $\overline{AB}$ é ortogonal à hipotenusa $\overline{CD}$ então o cateto $\overline{BD}$ é ortogonal à hipotenusa $\overline{AC}$.

5. (7.5 de [1]) O triângulo ABC, retângulo em A, está contido em um plano α. Sobre a perpendicular a α traçada por C tomamos um ponto D. Por C traçamos, por sua vez, as perpendiculares $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$ a $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Mostre que
   (a) AB é perpendicular a AD;
   (b) CE é perpendicular a EF;
   (c) DF é perpendicular a EF.

6. (7.6 de [1]) Sejam r uma reta do espaço e P um ponto exterior a r. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P aos planos que contém r?

7. (7.7 de [1]) Mostre que os centros das faces de um cubo são vértices de um octaedro regular e que os centros das faces de um octaedro regular são vértices de um cubo.

8. (7.8 de [1]) Mostre que os centros das faces de um tetraedro regular são vértices de um outro tetraedro regular. Qual é a razão entre as arestas dos dois tetraedros?

9. (7.9 de [1]) Sejam $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de V sobre o plano ABC é o ortocentro do triângulo ABC.

10. (7.10 de [1]) Pelo vértice A do triângulo ABC traça-se uma perpendicular $\overline{AA'}$ a seu plano. Sejam H e H' os ortocentros dos triângulos ABC e $A'B'C'$. Mostre que HH' é perpendicular ao plano de $A'B'C'$.

7 Planos perpendiculares

1. (8.1 de [1]) Mostre que dois planos são perpendiculares se e só se duas retas respectivamente perpendiculares a cada um deles são ortogonais.

2. (8.2 de [1]) Mostre que se um plano α contém uma reta perpendicular a um plano β, então o plano β contém uma reta perpendicular ao plano α.

3. (8.3 de [1]) Mostre que um plano é perpendicular a dois planos secantes se e somente se ele é perpendicular à reta de intersecção dos dois planos.

4. (8.4 de [1]) Em um cubo $ABCDEFGH$ mostre que os planos diagonais $ABHG$ e $EFDC$ são perpendiculares.

8 Aplicações: projeções, ângulos e distâncias

1. (9.1 de [1]) Mostre que os seis planos mediadores das arestas de um tetraedro qualquer passam por um mesmo ponto, que é equidistante dos quatro vértices.

2. (9.2 de [1]) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos não colineares?

3. (9.3 de [1]) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes dados? E se os planos forem paralelos?

4. (9.4 de [1]) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas dadas? Examine todas as possíveis posições relativas das retas.

5. (9.5 de [1]) Seja O a projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α. Considere uma circunferência de centro O contida em α. Mostre que todas as retas tangentes a essa circunferência estão à mesma distância de P.

6. (9.6 de [1]) Sejam $ABCD$ um quadrado de lado a e $\overline{PA}$ um segmento, também de comprimento a, perpendicular ao plano do quadrado. Calcule a medida do diedro determinado pelos triângulos PCB e PCD.

7. (9.7 de [1]) Considere três retas mutuamente perpendiculares, x, y e z, concorrentes em O. Uma reta r passa por O e forma ângulos iguais a α, β e γ com x, y e z.
   (a) Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
   (b) Calcule γ se $\alpha = \beta = 90^o$.

8. (9.8 de [1]) Sejam α e β dois planos secantes. Considere uma reta qualquer contida em α. Mostre que o ângulo entre r e β é máximo quando r é perpendicular à intersecção de α e β (retas de um plano α que são perpendiculares à sua intersecção com o plano β são, por esta razão, chamadas de retas de máximo declive de α em relação a β).

9. (9.9 de [1]) Considere um triângulo ABC. Pelos pontos A, B e C do triângulo são traçadas perpendiculares ao plano ABC. No mesmo semi-espaço são determinados os pontos A', B' e C' tais que $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ e $\overline{CC'} = c$ com $b < c < a$ (veja a Figura 9.18). Determine:

(a) O ponto em que a reta $A'B'$ encontra o plano ABC.

(b) A reta de intersecção do plano definido por A', B' e C' com o plano ABC.

(c) O pé da perpendicular baixada de A' à reta BC.

(d) O ângulo formado pela reta $A'B'$ com o plano ABC.

(e) O ângulo que o plano definido por A', B' e C' forma com o plano do papel.

10. (9.10 de [1]) Considere uma pirâmide triangular $V - ABC$ com base triangular ABC com comprimentos das arestas laterais tais que $\overline{VA} < \overline{VC} < \overline{VB}$ (veja a Figura 9.19).

    (a) Determine a projeção ortogonal de V sobre o plano ABC.

    (b) Determine, graficamente, a altura da pirâmide.

    (c) Ache o ângulo que a aresta lateral $\overline{VA}$ forma com o plano da base.

    (d) Ache e ângulo que a face lateral VAB forma com o plano da base.

    (e) Ache o ângulo formado pelas faces laterais VAB e VAC.

11. (9.11 de [1]) Considere um octaedro regular de aresta a. Determine:

    (a) A distância entre duas faces opostas.

    (b) O ângulo diedro formado por duas faces adjacentes.

12. (9.12 de [1]) Sejam r e s duas retas ortogonais e r' e s' as suas projeções ortogonais sobre um plano α. Sob que condições r' e s' formam um ângulo reto?

13. (9.13 de [1]) Sejam r e s duas retas reversas ortogonais e $\overline{MN}$ o segmento da perpendicular comum. Tomam-se um ponto A sobre r e um ponto B sobre s. Calcular o comprimento do segmento AB em função de $\overline{MA} = a$, $\overline{NB} = b$ e $\overline{MN} = c$.

14. (9.14 de [1]) Mostre que a reta que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro regular é a perpendicular comum a elas.

15. (9.15 de [1]) Mostre que a seção determinada em um cubo por um plano que passa pelo seu centro e é perpendicular a uma diagonal é um hexágono regular.

16. (9.16 de [1]) Qual é a seção determinada em um tetraedro regular $ABCD$ por um plano paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e passando pelo ponto médio da aresta $\overline{CD}$?

9 Esfera

1. (10.1 de [1]) Sejam dois pontos não diametralmente opostos de uma esfera. Mostre que existe um e somente um círculo máximo da esfera passando por A e B.

2. (10.2 de [1]) Mostre que dois círculos máximos de uma esfera se encontram em dois pontos diametralmente opostos.

3. (10.3 de [1]) Mostre que a intersecção de duas é vazia, um ponto ou uma circunferência.

4. (10.4 de [1]) Sejam P e Q pontos no espaço. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de P às retas passando por Q? Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de P aos planos passando por Q?

5. (10.5 de [1]) Seja P um ponto exterior a um plano α e Q um ponto de α. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P às retas de α que passam por Q?

6. (10.6 de [1]) Seja $ABCDEFGH$ um cubo. Mostre que A, C, F e H são vértices de um tetraedro regular. Utilize esse fato para mostrar que o raio da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular de aresta a é $r' = a\sqrt{2}/4$.

7. (10.7 de [1]) Em um cubo de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

8. (10.8 de [1]) Em um octaedro regular de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

9. (10.9 de [1]) Quatro esferas de raio 1 são tangentes entre si exteriormente três a três e tangenciam internamente uma esfera de raio R. Determine R.

10. (10.10 de [1]) Considere nove esferas de raio R, interiores a um cubo de aresta a, sendo uma com centro no interior do cubo e cada uma das demais tangentes a três faces. Calcule R em função de a.

11. (10.11 de [1]) Mostre que todo tetraedro admite uma esfera circunscrita, e uma esfera inscrita. Que condições ele deve satisfazer para admitir uma esfera tangente às arestas?

10 Outros

1. Considere uma pirâmide V-$ABCD$ em que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado. Suponha que todas as arestas da pirâmide têm comprimento

igual a 4. Sejam M, N e P os pontos situados nas arestas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ tais que $\overline{VM}$, $\overline{VN}$ e $\overline{VP}$ têm comprimentos iguais a 1, 2 e 3, respectivamente. Seja Q o ponto de intersecção do plano MNP com a aresta $\overline{VD}$.

(a) Qual é o comprimento do segmento $\overline{VQ}$?

(b) Qual é o volume da pirâmide V-$MNPQ$?

Referências

[1] Paulo Cezar Pinto Carvalho, *Introdução à Geometria Espacial*, Quarta Edição, Coleção do Professor de Matemática, IMPA, 2005.