Avaliação 2 – Solução
Geometria Espacial
MAT 050

4 de maio de 2018

As respostas das questões a seguir devem ser entregue até o final da aula de hoje:

1. (5 pontos) Seja r uma reta secante a um plano α e P um ponto exterior a α e a r. Mostre que existe uma única reta que passa por P, encontra r e é paralela a α.

   Seja β o único plano paralelo a α que passa por P (Teorema). Como r corta α, a reta r corta também β, em Q, pois β é paralelo a α (Teorema).

   A reta PQ passa por P e r, e é paralela a α (pois está contida em β que não intersecta α).

   Seja s uma reta paralela a α que passa por P e r. Seja R o ponto de intersecção de s e r. Se R está em β, então R pertence à intersecção de r e β, que é o ponto Q, ou seja, R coincide com Q. Nesse caso s coincide com a reta PQ.

   Se R não pertence a β, seja γ o plano determinado por P, Q e R. Então γ e β se intersectam segundo a reta PQ (pois P e Q são comum aos dois planos). Além disso γ intersecta α segundo uma reta $P'Q'$ paralela a PQ (Teorema). No plano γ, a reta PR corta a reta PQ, e logo corta a reta $P'Q'$. Portanto a reta PR corta o plano α, o que é impossível.

2. (5 pontos) Mostre que por um ponto dado se pode traçar uma única reta ortogonal a duas retas não paralelas dadas.

   Sejam r e s retas não paralelas e P um ponto.

   Se r e s são concorrentes, elas definem um único plano α (Teorema). Existe uma única reta t perpendicular a α passando por P (Teorema). Isso implica que t é ortogonal a todas as retas de α, em particular às retas r e s. Suponha que exista uma reta t' ortogonal a r e s

passando por P. Então t' é perpendicular a α, pelo Teorema 7.2. Mas a perpendicular a α passando por P é única. Logo $t' = t$.

Se r e s são reversas, considere um ponto Q em s. Seja r' a reta paralela a r passando por Q. Então r' e s são concorrentes e definem um único plano α. Existe uma única reta t perpendicular a α passando por P. Isso implica que t é ortogonal a todas as retas de α, em particular às retas r' e s.

Seja R um ponto de r, e seja s' a paralela a s passando por R. As retas s' e r são paralelas a α, logo o plano β definido por s' e r é paralelo a α. Portanto t é perpendicular a β, e consequentemente t é ortogonal a r.

Para provar a unicidade de t, podemos repetir o argumento usado no caso em que r e s são concorrentes.

3. (5 pontos) Mostre que dois planos são perpendiculares se e somente se duas retas respectivamente perpendiculares a cada um deles são ortogonais.

   Sejam α e β planos perpendiculares. Os planos α e β se intersectam segundo uma reta r. Seja γ um plano perpendicular à reta r que corta α e β segundo as retas s e t, respectivamente. Então s e t formam um ângulo reto (pois α e β são perpendiculares). A reta s de α é perpendicular às retas concorrentes r e t de β. Logo s é perpendicular a β (Teorema 7.2). Analogamente, concluímos que t é perpendicular a α. Sejam u e v retas perpendiculares a α e β, respectivamente. Então u e s são paralelas e v e t são paralelas (Afirmação 2). Por definição, o ângulo entre u e v é o ângulo entre s e t, que é reto. Logo u e v são ortogonais.

   Sejam s e t retas ortogonais respectivamente perpendiculares a planos α e β. Seja P um ponto em α, e sejam s' e t' retas respectivamente paralelas a s e t passando por P. Então o ângulo entre s' e t' é reto. Além disso, a reta s' é perpendicular a α. Logo t' está contida em α. (Se não estivesse, o ângulo entre s' e t' não poderia ser reto, basta examinar a intersecção do plano α com o plano definido por s' e t'...). Portanto t' é perpendicular a β e está contida em α. Logo α e β são perpendiculares (Teorema 8.1).

As respostas das questões a seguir devem ser entregues no início da aula do dia 9-mai-2018:

1. (4 pontos) Fazer a construção geométrica do tetraedro regular conforme a Seção 7.4.

   Consideramos uma pirâmide de vértice V cuja base é um triângulo equilátero ABC. Seja O o centro do triângulo ABC. Sobre a reta perpendicular ao plano base que passa por O, tomamos o vértice V e modo que as arestas laterais $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ sejam congruentes às arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. As faces da pirâmide assim obtida, chamada tetraedro regular, são triângulo equiláteros congruentes.

Seja r a perpendicular ao plano de VBC passando por A, e seja P o ponto em que a reta r corta o plano VBC. Os triângulo APB, APC e APV são congruentes já que suas hipotenusas são congruentes e eles têm o cateto AP em comum. Logo os segmentos PB, PC e PV são congruentes. Portanto P é o centro do triângulo equilátero VBC. Isso mostra que pirâmide é regular qualquer que seja a face tomada como base.

2. (3 pontos) Prove o Teorema das Três Perpendiculares: Sejam A, B e C pontos não colineares. Se as retas AB e AC são ortogonais à reta r, então BC também é ortogonal a r.

   As retas AB e AC são concorrentes, logo elas definem um único plano α (Teorema). Como r é ortogonal às retas concorrentes AB e AC de α, a reta r é perpendicular a α (Teorema). Logo r é ortogonal a toda reta de α, em particular à reta BC (que está contida em α pois B e C pertencem à α).

3. (4 pontos) Seja P um ponto exterior a um plano α. Para cada ponto Q de α seja X o ponto do segmento $\overline{PQ}$ que o divide na razão

$$\frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}} = k.$$

   Qual é o lugar geométrico do ponto X quando Q percorre o plano α?

   Seja β o plano paralelo a α que passa por P. Para cada ponto Q de α, seja X o ponto do segmento PQ tal que $\overline{XP}/\overline{XQ} = k$, e seja r a reta perpendicular a α passando por X. Seja γ o plano paralelo a α passando por X. A reta r corta α e β em X_1 e X_2, respectivamente. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{X_2X}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{XX_1}}{\overline{XQ}}.$$

   Logo $\overline{X_2X} = k\overline{XX_1}$. Por outro lado $\overline{X_2X} + \overline{XX_1} = \overline{X_2}X_1 = d(P, \alpha)$. Combinando esses fatos, obtemos $\overline{XX_1} = d(P, \alpha)/(1 + k)$ para todo Q em α. Portanto o lugar geométrico do ponto X quando Q percorre o plano α é um plano paralelo a α cuja distância a α é $d(P, \alpha)/(1 + k)$.

4. (4 pontos) Sejam $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de V sobre o plano ABC é o ortocentro do triângulo ABC.

Seja α o plano definido por A, B e C. Seja V' a projeção ortogonal de V sobre α. Por definição a reta VV' é perpendicular ao plano α. Logo VV' é ortogonal à reta BC (também por definição).

Seja β o plano definido por V, B e C. Por hipótese, a reta VA é perpendicular às retas concorrentes VB e VC, que estão contidas em β. Logo VA é perpendicular a β, e consequentemente VA é ortogonal a BC.

Seja γ o plano definido por V, A e V'. A reta BC é ortogonal às retas concorrentes VA e VV' de γ, logo BC é perpendicular a γ. Logo BC é perpendicular à reta AV'. Sendo assim, o ponto V' pertence à altura de A com respeito a BC.

Analogamente, prova-se que V' pertence às outras duas alturas do triângulo ABC. Portanto V' é o ortocentro do triângulo ABC.