Avaliação 3 – Solução
Geometria Espacial
MAT 050

28 de junho de 2018

As respostas das questões a seguir devem ser entregues até o final da aula de hoje:

1. (6 pontos) Mostre que, para todo poliedro convexo, valem as desigualdades
$$A + 6 \leq 3F \qquad \text{e} \qquad A + 6 \leq 3V.$$
Usando a relação de Euler $V - A + F = 3$, obtemos $6 = 3V + 3F - 3A$. Por outro lado, provamos em aula que $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$. Logo $6 \leq 2A + 3F - 3A$, ou seja $6 + A \leq 3F$. Além disso, $6 \leq 3V + 2A - 3A$, ou seja, $6 + A \leq 3V$.

2. (7 pontos) Mostre que o volume de um tronco de cone de base circular em função da altura h (do tronco) e dos raios R e r das bases tem a expressão
$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$
Considere um cone K de altura $h + z$ e base circular de raio R. Esse cone é a união de um cone de altura z e base circular de raio r com o tronco de cone de altura h e bases com raios R e r. Seja O o centro da base circular de raio R, seja P um ponto no círculo de raio R, e seja V o vértice do cone K. Seja O' o centro da base circular de raio r, e seja P' um ponto no círculo de raio r. Considere o triângulo OPV, que contém o triângulo inscrito $O'P'V$. Por semelhança de triângulo temos
$$\frac{R}{h+z} = \frac{r}{z}.$$
O volume do tronco em questão é igual a
$$\frac{1}{3}(h+z)\pi R^2 - \frac{1}{3}z\pi r^2.$$
Calculando e usando a relação acima, obtemos a expressão desejada.

3. (7 pontos) O paraboloide de revolução de altura h é o sólido gerado pela rotação do segmento de altura h da parábola $z = y^2$ (situada no plano OYZ) em torno do eixo vertical OZ (veja a Figura 4.21 em "Medida e Forma em Geometria"). Em termos das coordenadas cartesianas (x, y, z), esse paraboloide é o conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem a condição $x^2 + y^2 \leq z \leq h$. Observe que cada plano horizontal $z = c$, com $c > 0$, intersecta o paraboloide segundo um círculo de raio $\sqrt{z}$. Considere um prisma de altura π, que tem por base o triângulo retângulo isósceles, no plano OYZ, cujos vértices são os pontos O, $(0, 0, h)$ e $(0, h, h)$. Prove que o volume do paraboloide é igual a $\pi h^2/2$.

   A solução dessa questão consiste de uma aplicação direta do Princípio de Cavalieri.