Prova 1

MAT 105 - GAAL - Turma M
http://bit.ly/gaal-2018-tm

10 de setembro de 2018

1. (6 pontos) Sejam $a < b < c$ respectivamente as coordenadas dos pontos A, B e C situados sobre um eixo.
   (a) Sabendo que $a = 17$, $c = 32$ e
   $$\frac{d(A,B)}{d(A,C)} = \frac{2}{3},$$
   qual é o valor de b?
   (b) Qual seria a resposta do item (a) se soubéssemos apenas que $a < c$?
2. (7 pontos) Considere os pontos $A = (-3,-1)$ e $B = (4,2)$.
   (a) Escreva a parametrização do segmento de reta AB.
   (b) Determine o ponto médio do segmento AB.
   (c) Decida se o segmento AB corta um dos eixos, ambos, ou nenhum deles. Determine o(s) pontos(s) de intersecção quando existirem.
3. (6 pontos) Sejam $A = (2,1)$ e $B = (5,2)$. Qual é o ponto C de abcissa 3 tal que AC é perpendicular a AB?
4. (6 pontos) Considere os vetores $v = (-3,2)$ e $w = (1,-2)$.
   (a) Exprima o vetor $z = (2,3)$ como combinação linear de v e w.
   (b) Os vetores v e w são linearmente independentes (ou seja, não colineares)? Justifique.

Solução

1. (a) Usando a fórmula $d(X,Y) = |x - y|$, temos que

$$\frac{|17-b|}{|17-32|} = \frac{3}{2}.$$

Como $b > 17$ e $32 > 17$, essa equação é equivalente a

$$\frac{b-17}{32-17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$b = \frac{2}{3}15 + 17 = 27.$$

(b) Se soubéssemos apenas que $a < c$, poderia ocorrer que B estivesse à direita de A ou B estivesse à esquerda de A. Logo, além da caso considerado no item (a), teríamos o caso em que $b < 17$ de modo que $|17 - b| = 17 - b$. Dessa forma teríamos

$$\frac{17-b}{32-17} = \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$-b = \frac{2}{3}15 - 17 = -7,$$

o que implica em $b = 7$.

2. (a) As equações paramétricas são

$$x = (1-t)(-3) + t4 = -3 + 7t,$$
$$y = (1-t)(-1) + t2 = -1 + 3t$$

para $t \in [0, 1]$.

(b) O ponto médio do segmento corresponde a $t = 1/2$, ou seja, é o ponto

$$M = \left(-3 + 7\frac{1}{2}, -1 + 3\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(c) Procuramos t tal que $x = 0$, ou seja, $-3 + 7t = 0$, o que implica $t = 3/7$. Observamos que $3/7 \in [0, 1]$. Portanto o segmento corta o eixo OY em

$$P_1 = \left(0, -1 + 3\frac{3}{7}\right) = \left(0, \frac{2}{7}\right).$$

Agora, procuramos t tal que $y = 0$, ou seja, $-1 + 3t = 0$, o que implica $t = 1/3$. Observamos que $1/3 \in [0, 1]$. Portanto o segmento corta o eixo OX em

$$P_2 = \left(-3 + 7\frac{1}{3}, 0\right) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right).$$

Em resumo, o segmento AB corta os eixos OY e OXY nos pontos P_1 e P_2, respectivamente.

3. Procuramos um ponto C da forma $C = (3, y)$ tal que AC e AB sejam perpendiculares. Isso ocorre se e somente se

$$(3-2)(5-2) + (y-1)(2-1) = 0,$$

ou seja, $2 + y = 0$, ou seja, $y = -2$. Portanto $C = (3, -2)$.

4. (a) Procuramos x e y tais que $xv + yw = z$, ou seja,

$$x(-3, 2) + y(1, -2) = (2, 3),$$

ou seja

$$-3x + y = 2$$
$$2x - 2y = 3.$$

Resolvendo esse sistema obtemos $x = -7/4$ e $y = -13/4$. Portanto

$$-\frac{7}{4}v - \frac{13}{4}w = z.$$

(b) Sim, os vetores v e w são linearmente independentes pois

$$(-3)(-2) - 2(1) = 4 \neq 0.$$

Equivalentemente, pode-se verificar que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda w$, ou seja, os vetores v e w não são colineares.