Prova 2

MAT 105 - GAAL - Turma M
http://bit.ly/gaal-2018-tm

10 de outubro de 2018

1. (5 pontos) Sob a forma $ax + by = c$, escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P = (5, -1)$ e é perpendicular à reta $3x - 2y = 2$.

2. (5 pontos) Seja Γ a circunferência de centro na origem O e raio 3.

   (a) Escreva a equação de Γ.

   (b) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $A = (2, 5)$ e tem inclinação m.

   (c) Ache as equações das retas que passam pelo ponto $A = (2, 5)$ e são tangentes a Γ.

3. (5 pontos) Cada uma das equações abaixo representa um subconjunto do plano. Em cada caso, determine qual subconjunto a equação representa e faça um esboço desse subconjunto no plano. Em caso de cônica, reescreva a equação na forma padrão.

   (a) $6x^2 - 10y^2 - 15 = 0$.

   (b) $-\frac{1}{2}x^2 - 4y^2 + 8 = 0$.

   (c) $3x^2 - 5y^2 = 0$.

4. (5 pontos) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (3x + y, 2x + 2y)$.

   (a) Dê um exemplo de um vetor v não nulo tal que $Tv = v$.

   (b) Determine todos os vetores $v = (x, y)$ tais que $Tv = v$.

5. (5 pontos) Determine uma translação de eixos do sistema $O'X'Y'$ para o sistema OXY que elimina os termos lineares da equação $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

Solução

1. A reta $3x - 2y = 2$ é perpendicular à reta OA com $A = (3, -2)$. Efetuando uma rotação de 90 graus no segmento OA obtemos OA' com $A' = (2, 3)$. A reta OA' é perpendicular à reta procurada. Portanto a equação da reta procurada tem a forma $2x + 3y = c$. Essa reta deve passar por $P = (5, -1)$, logo $2(5) + 3(-1) = c$, ou seja, $c = 7$. Portanto a equação da reta procurada é $2x + 3y = 7$.

2. (a) A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 9$ (que é equivalente a $d(P, O) = 3$ com $P = (x, y)$).

(b) A equação da reta é $y - 5 = m(x - 2)$, ou seja, $y = mx + 5 - 2m$.

(c) Os pontos de interseção da reta com a circunferência correspondem às soluções do sistema

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$y = mx + 5 - 2m.$$

Cada reta é tangente à circunferência se e somente se o sistema possui apenas uma solução. Substituindo a segunda equação na primeira e simplificando, obtemos

$$(1 + m^2)x^2 + 2m(5 - 2m)x + 4(4 - 5m + m^2) = 0.$$

Essa equação possui apenas uma solução se e somente se seu discriminante Δ é igual à zero. Calculamos $\Delta = 20m^2 + 80m - 64$. Logo $\Delta = 0$ corresponde a $20m^2 + 80m - 64 = 0$, ou seja, $5m^2 + 20m - 16 = 0$. As raízes dessa equação são

$$m = -2 \pm \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

Portanto as equações que passam por A e são tangentes à Γ são

$$y = \left(-2 - \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)x + 9 + \frac{12}{5}\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad y = \left(-2 + \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)x + 9 - \frac{12}{5}\sqrt{5}.$$

3. (a) A equação dada é equivalente a

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 1.$$

Essa equação representa uma hipérbole.

(b) A equação dada é equivalente a

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Essa equação representa uma elipse.

(c) A equação dada é equivalente a

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}x.$$

Essas equações representam um par de retas concorrentes.

4. (a) Procuramos uma solução da equação $Tv = v$. Seja $v = (x, y)$. Essa equação corresponde a $T(x, y) = (x, y)$, ou seja, $(3x + y, 2x + 2y) = (x, y)$, ou seja $(2x + y, 2x + y) = (0, 0)$, ou seja, $2x + y = 0$. As soluções dessa equação são da forma $(x, -2x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Se $x = 1$, então $y = -2$. Portanto $v = (-1, 2)$ é um vetor tal que $Tv = v$.

(b) As soluções v de $Tv = v$ são $v = t(1, -2)$ para $t \in \mathbb{R}$.

5. Considere a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= x' + h, \\ y &= y' + k. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ e simplificando, obtemos

$$x'^2 + 2y'^2 + (2h - 4)x' + (4k - 4)y' + h^2 + 2k^2 - 4k - 4h - 1 = 0.$$

Procuramos h e k tais que

$$\begin{aligned} 2h - 4 &= 0 \\ 4k - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Essas equações implicam $h = 2$ e $k = 1$. Portanto a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x' + 2, \\ y &= y' + 1 \end{aligned}$$

transforma a equação $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ em $x'^2 + 2y'^2 - 7 = 0$. Essa equação representa uma elipse.