Prova 3

MAT 105 - GAAL - Turma M
http://bit.ly/gaal-2018-tm

9 de novembro de 2018

1. (6 pontos) Considere a forma quadrática $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$. Execute as seguintes tarefas:
   (a) Escreva a matriz de φ e a equação característica de φ.
   (b) Calcule os autovalores de φ.
   (c) Obtenha autovetores unitários u e v de φ. (Sugestão: Lembre do sistema de equações $(A - \lambda)x + By = 0$ e $Bx + (C - \lambda)y = 0$.)
   (d) Quais valores de a e b você obteve para a mudança de variáveis $x = as - bt$ e $y = bs + at$?
   (e) Escreva a equação $\varphi(x, y) = 36$ usando as coordenadas (s, t) e identifique essa linha de nível.
   (f) Faça um esboço do sistema de coordenadas OXY, do sistema de coordenadas OST, e da linha de nível $\varphi(x, y) = 36$.

2. (6 pontos) Considere os pontos $A = (-3, 1, 2)$, $B = (6, 0, -2)$ e $C = (2, 5, 1)$.
   (a) Escreva as equações paramétricas para a reta AB.
   (b) Determine a equação do plano Π que é perpendicular à reta AB e passa pelo ponto C.
   (c) Determine o ponto P de interseção do plano Π com a reta AB.

3. (5 pontos) Seja O a origem de um sistema de coordenadas $OXYZ$.
   (a) Descreva o subconjunto Γ de pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tais que $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 4$ e obtenha uma equação que represente esse conjunto.
   (b) Descreva a intersecção de Γ com o plano $z = 0$ e obtenha uma equação que represente esse subconjunto.

4. (4 pontos) Prove que não existe x tal que os vetores $v = (x, 2, 4)$ e $w = (x, -2, 3)$ sejam ortogonais.

5. (4 pontos) Qual é a posição relativa dos planos $\Pi : -6x + 4y - 2z = -8$ e $\Pi' : 9x - 6y + 2z = 12$? Justifique.

Solução

1. (a) A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

(b) Os autovalores de φ são as raízes da equação característica, ou seja, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$.

(c) Consideramos a equação $(A - \lambda)x + By = 0$, ou seja, $(5 - \lambda)x - 2y = 0$. Para $\lambda = \lambda_1$, obtemos $x - 2y = 0$. Tomamos uma solução não nula dessa equação, por exemplo, $(x, y) = (2, 1)$. Observamos que $|(x, y)| = \sqrt{5}$. Definimos $u = |(x, y)|^{-1}(x, y) = (1/\sqrt{5})(2, 1)$. Logo u é um autovetor unitário associado a λ_1. Para calcular um autovetor unitário associado a λ_2, repetimos o mesmo procedimento com λ_2 no lugar de λ_1. Alternativamente, tomamos v como uma rotação de $+90$ graus do vetor u. Obtemos assim $v = (1/\sqrt{5})(-1, 2)$, que é um autovetor unitário associado a λ_2.

(d) Lembramos que $u = (a, b)$, ou seja, $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = (a, b)$. Logo $a = 2/\sqrt{5}$ e $b = 1/\sqrt{5}$ são os valores dos parâmetros na mudança de coordenadas.

(e) A equação $\varphi(x, y) = 36$ é equivalente à equação $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = 36$, ou seja, $4s^2 + 9t^2 = 36$. Essa equação é equivalente a $s^2/3^2 + t^2/2^2 = 1$, que representa uma elipse.

(f) Figura com o esboço dos sistemas OXY e OST e da elipse.

2. (a) As equações paramétricas da reta são

$$\begin{aligned} x &= -3 + 9t, \\ y &= 1 - t, \\ z &= 2 - 4t. \end{aligned}$$

(b) Usamos o vetor diretor da reta AB como vetor normal do plano. Logo a equação do plano tem a forma $9x - y - 4z = d$. Como C pertence ao plano, concluímos que $d = 9$. Portanto a equação do plano é $9x - y - 4z = 9$.

(c) Substituindo as equações paramétricas da reta na equação do plano, obtemos $t = 45/98$. O ponto correspondente é

$$P = \left(\frac{111}{98}, \frac{53}{98}, \frac{8}{49}\right).$$

3. (a) Seja $P = (x, y, z)$. A equação $|\overrightarrow{OP}|^2 = 4$ corresponde a $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$. Essa equação representa a esfera de centro O e raio 2.

(b) A interesecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $z = 0$ corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ z &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, à equação $x^2 + y^2 = 2^2$. Essa equação representa a circunferência de centro O e raio 2 no plano XY.

4. Os vetore v e w são ortogonais se e somente se $\langle v, w\rangle = 0$, ou seja, $x(x) + 2(-2) + 4(3) = 0$, ou seja, $x^2 + 8 = 0$. Todavia, essa equação não possui solução (real). Portanto não existe x tal que v e w sejam ortogonais.

5. Os vetores normais dos planos são $N = (-6, 4, -2)$ e $N' = (9, -6, 2)$. Procuramos uma constante k tal que $N = kN'$, ou seja, $(-6, 4, -2) = (9k, -6k, 2k)$. Todavia, essa equação não possui solução. Logo os vetores N e N' não são colineares. Portanto os planos Π e Π' são concorrentes.