Lista de Exercícios – Parte II
Geometria Analítica e Álgebra Linear
MAT 105

Primeiro Período de 2018

Esta lista contém exercícios de [1] e de outras referências. Além dos exercícios a seguir, sugerimos os demais exercícios de [1].

Seção 23 – Transformações Lineares

1. Em cada um dos casos a seguir, determine a imagem do vetor v sob a rotação de ângulo θ em torno da origem.
   (a) $v = (2, -3)$ e $\theta = 90^o$.
   (b) $v = (-5, 2)$ e $\theta = 180^o$.
   (c) $v = (\sqrt{3}, 1)$ e $\theta = 30^o$.

2. Determine se a matriz
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$
   pode ou não ser a matriz de uma rotação em torno da origem.

3. Determine a matriz da rotação que leva os vetores $(3, 4)$ e $(1, -2)$ nos vetores $(-4, 3)$ e $(2, 1)$, respectivamente.

4. Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem. Use as equações que fornecem as coordenadas de Rv para mostrar que $\langle Ru, Rv\rangle = \langle u, v\rangle$ e $|Rv| = |v|$ para quaisquer u e v em $\mathbb{R}^2$.

5. Se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz de uma rotação em torno da origem, mostre que os vetores-coluna de M são unitários e ortogonais.

6. Determine os eixos da elipse que é a imagem da circunferência unitária por cada uma das seguintes transformações lineares:

(a) $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$.

(b) $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (4x + 6y, 6x + 9y)$. Mostre que todos os pontos da reta $2x + 3y = 1$ são transformados por T no mesmo ponto de $\mathbb{R}^2$. Qual é esse ponto?

8. Considere o quadrado $ABCD$ onde $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$. Considere a transformação $T(x, y) = (2x + 3y, 4x + 5y)$. Qual é a área do paralelogramo no qual é transformado $ABCD$ por T?

9. Dados $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$, $u' = (5, 6)$ e $v' = (7, 8)$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

A equação

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

é chamada a equação característica da transformação T. As raízes dessa equação (se existirem em $\mathbb{R}$) são chamadas os autovalores de T.

(a) Verifique que a equação característica é a condição para que o seguinte sistema possua um número infinito de soluções:

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda x \\ cx + dy &= \lambda y. \end{aligned}$$

(b) Conclua que λ é um autovalor de T se e somente se existe um vetor não nulo v tal que $Tv = \lambda v$.

(c) Mostre que se $b = c$, então T possui autovalores reais.

(d) Dada a transformação linear $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$, encontre vetores u e v não nulos tais que $Tu = u$ e $Tv = 3v$.

11. Calcule os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Seção 24 – Coordenadas no Espaço

1. Identifique geometricamente os seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z^2 + 2z = 3\}$.

   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

2. Escreva a equação do plano vertical que passa pelos pontos $P = (2, 3, 4)$ e $Q = (1, 1, 758)$.

3. Escreva a equação geral de um plano vertical.

Seção 25 – As Equações Paramétricas de uma Reta

1. Obtenha equações paramétricas para a reta AB nos seguintes casos:

   (a) $A = (2, 3, 4)$ e $B = (5, 6, 7)$.

   (b) $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (6, 0, -2)$.

   (c) $A = (2, 5, 1)$ e $B = (3, 5, 1)$.

2. Mostre que as equações paramétricas

   $$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 6t, \quad z = 3 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}$$

   e

   $$x' = 2 + s, \quad y' = 5 + 3s, \quad z' = 5 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}$$

   definem a mesma reta.

3. Prove que as retas dadas pelas equações paramétricas

   $$x = -2 + 2t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

   e

   $$x' = 1 + s, \quad y' = 2 - s, \quad z' = 3 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}$$

   não têm pontos em comum e não são paralelas. São, portanto, retas reversas.

4. Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$, determine o ponto de intersecção da reta AB com o plano Π_{xy}, com o plano Π_{xz} e com o plano Π_{yz}.

5. Considere os pontos $A = (3, 5, 2)$, $B = (-1, -1, 4)$ e $C = (2, 1, 5)$. Determine equações paramétricas para a reta paralela a AB que passa por C.

Seção 26 – Distância entre Dois Pontos no Espaço

1. Escolhendo o sistema de eixos adequado, mostre que, dados dois pontos A e B e uma constante c, o conjunto dos pontos P do espaço tais que $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = c$ é um plano perpendicular à reta AB.

2. Determine a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ com o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Esboce geometricamente a situação.

Seção 28 – Vetores no Espaço

1. Dados os vetores $w = (\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')$, $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, calcule os produtos internos $\langle u, w\rangle$ e $\langle v, w\rangle$. Qual relação entre u e v implica $w = 0$?

2. Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário com $abc \neq 0$. Considere os vetores $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct, -1/t)$. Determine o valor de t para que os vetores u, v e w sejam unitários e mutuamente ortogonais. A condição $abc \neq 0$ pode ser omitida?

3. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

4. Considere as retas $r_1 = \{A + sv \mid s \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{B + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$, onde A e B são pontos e v e w são vetores. Prove que $r_1 = r_2$ se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e w são múltiplos de v.

5. Sem usar coordenadas, explique o significado das seguintes afirmações: (a) os vetores u e v são ortogonais; (b) o vetor v é ortogonal à reta r; (c) o vetor v é ortogonal ao plano Π; (d) os vetores u e v são colineares; (e) os vetores u, v e w são coplanares.

6. Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores não coplanares. Se o vetor w é tal que $\langle w, v_1\rangle = 0$, $\langle w, v_2\rangle = 0$ e $\langle w, v_3\rangle = 0$, prove que $w = 0$.

Seção 29 – Equação do Plano

1. Obtenha uma equação para o plano que contém P e é perpendicular ao segmento de reta AB nos seguintes casos:

   (a) $P = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, -1, 2)$.
   (b) $P = (1, 1, -2)$, $A = (3, 5, 2)$ e $B = (7, 1, 12)$.
   (c) $P = (3, 3, 3)$, $A = (2, 2, 2)$ e $B = (4, 4, 4)$.

(d) $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$.

2. Sejam $A = (3,1,3)$, $B = (5,5,5)$, $C = (5,1,-2)$ e $D = (8,3,-6)$. Mostre que as retas AB e CD são concorrentes e ache uma equação para o plano que as contém.

3. Sejam $A = (-1,1,2)$, $B = (2,3,5)$ e $C = (1,3,-2)$. Obtenha uma equação para o plano que contém a reta AB e o ponto C.

4. Supondo que $abc \neq 0$, escreva a equação do plano que corta os Eixos OX, OY e OZ nos pontos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$, respectivamente.

5. Qual é a equação do plano tangente, no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, à esfera com centro $A = (a,b,c)$ e raio r?

6. Ache as coordenadas do ponto do plano $2x + y - 2z = 12$ que está mais próximo da origem.

7. Sejam Π e Π' planos no espaço. Se Π e Π' são iguais ou concorrentes, a distância de Π a Π' é zero. Suponha que Π e Π' sejam paralelos. Então eles são descritos por equações $ax + by + cz = d$ e $ax + by + cz = d'$ com $d \neq d'$, respectivamente. Mostre que a distância entre Π e Π', denotada por $d(\Pi, \Pi')$, é dada por

$$d(\Pi, \Pi') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(Sugestão: Considere a reta que passa pela origem e é perpendicular aos planos.) Seja $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer no espaço, e seja $d(P_0, \Pi)$ a distância do ponto P_0 ao plano Π. Use a fórmula para $d(\Pi, \Pi')$ para provar que

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(Sugestão: Considere o plano paralelo a Π que passa por P_0.)

8. Qual é o ponto do plano $2x - 3y + z = 5$ mais próximo do ponto $P = (1,3,1)$?

9. Escreva as equações paramétricas da reta que passa por $P = (1,2,3)$ e é perpendicular ao plano $x - 3y + 2z = 1$.

Seção 31 – Sistemas de Equações Lineares com Três Incógnitas

1. Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.

(a)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 3 \\ 4x - 2y + 10z &= 5 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 12z &= 2 \\ 9x - 6y + 18z &= 3 \end{aligned}$$

2. No sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \end{aligned}$$

admitindo que se tem três incógnitas (ou seja, que pelo menos um dos vetores (a_1, a_2), (b_1, b_2) e (c_1, c_2) seja diferente de zero), mostre que se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ e $c_1d_2 - c_2d_1$, então existe $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = k_b1$, $c_2 = kc_1$ e $d_2 = kd_1$.

Seção 32 – Sistemas de Três Equações Lineares com Três Incógnitas

1. Sejam $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 2)$, $C = (4, 3, -1)$ e $D = (5, -15, 6)$. Mostre que os vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ são linearmente dependentes e ache a equação de um plano que contenha os pontos A, B, C e D.

2. No sistema a seguir, atribua sucessivamente valores aos parâmetros m e n de modo que as três equações representem um único plano, dois planos ou três planos:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= m \\ 3x - 6y - 9z &= n \\ -2x + 4y + 6z &= 1. \end{aligned}$$

3. Para quais valores de m e n o sistema a seguir possui solução?

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 3 \\ 3x + 3y + mz &= n \end{aligned}$$

4. Para cada um dos sistemas a seguir, decida em qual dos casos (primeiro a oitavo) discutidos no texto ele se enquadra. Determine também todas as soluções do sistema, se houver.

$$\begin{aligned} 3x-5y+2z&=1 \\ 4x-3y+z&=2 \\ 2x-7y+3z&=4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x-5y+2z&=2 \\ 4x-3y+z&=1 \\ 5x-12y+5z&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-5y+2z&=3 \\ 4x-3y+z&=4 \\ 6x-10y+4z&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x-5y+2z&=4 \\ 4x-3y+z&=3 \\ 5x-7y+3z&=2 \end{aligned}$$

Seção 33 – Escalonamento (Eliminação Gaussiana)

1. Resolva cada um dos sistemas a seguir:

$$\begin{aligned} x-y+z&=1 \\ x+y-z&=1 \\ -x+y+z&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y+z&=1 \\ x+2y+3z&=1 \\ 2x-4y&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ 2x-y+2z&=2 \\ x+y+z&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-3y+z&=2 \\ x-2y-z&=1 \\ 2x-4y-2z&=2 \end{aligned}$$

2. Aplique o processo de escalonamento a cada um dos sistemas a seguir e, a partir do resultado, identifique em qual dos oito casos da seção anterior o sistema se enquadra.

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=4 \\ 3x-y+2z&=5 \\ 9x-3y+6z&=16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-2y+2z&=3 \\ 2x+y-z&=4 \\ 2x-4y+4z&=6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x-y+2z&=5 \\ x-(1/3)y+(2/3)z&=3 \\ 6x-2y+4z&=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y-2z&=1 \\ 3x+3y-6z&=2 \\ 2x+2y-4z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+y-3z&=1 \\ 3x+2y+z&=2 \\ x-5z&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x+2y+z&=4 \\ x+2y+3z&=4 \\ 2x+y+2z&=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x+2y+z&=2 \\ 3x+y+(1/2)z&=1 \\ 2x+(2/3)y+(1/3)z&=2/3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x-2y+3z&=2 \\ 3x+y-2z&=1 \\ x+7y-12z&=-1 \end{aligned}$$

Seção 34 – Operações com Matrizes

1. Calcule, se possível, o resultado das seguintes operações com matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 13 \end{bmatrix}$.

   (e) $\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

   (f) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Sejam

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad m' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Determine as matrizes $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $v' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ tais que $mv = 0$ e $m'v' = 0$.

3. Sejam

$$m = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Mostre que $m^2 = I$. Determine os números α e β tais que a matriz $p = \alpha m + \beta I$ cumpra $p^2 = p$ e seja não-nula. A partir daí, encontre uma matriz não-nula q tal que $pq = qp = 0$.

4. Sejam $m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva dois sistemas 2×2 para achar uma matriz $p = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ tal que $mp = I$.

5. Sejam

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad p = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule mp e pm. O que você observou?

Seção 35 – Determinantes

1. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 11 & 0 & 17 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D^T, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E^2.$$

2. Calcule o valor de x que satisfaz a equação

$$\det\left(\begin{bmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{bmatrix}\right) = 6.$$

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(AB)$, $\det(A)$ e $\det(B)$.

4. Calcule o determinante da matriz de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} m^2 & m & 1 \\ n^2 & n & 1 \\ p^2 & p & 1 \end{bmatrix}.$$

Sem calcular o determinante, mostre diretamente que se m, n e p são três números distintos então a matriz acima tem posto 3 (isto é, suas linhas são linearmente independentes).

Seção 40 – O Produto Vetorial

1. Dados $u = (1, 1, 0)$, $v = (-1, 2, 1)$ e $w = (2, 0, -1)$.

   (a) Calcule $u \times v$ e $v \times w$.

   (b) Calcule $(u \times v) \times w$ e $u \times (v \times w)$.

(c) O produto vetorial é uma operação associativa? Justifique sua resposta.

2. Ache um vetor unitário ortogonal a $u = (2, 1, 2)$ e $v = (1, 2, -1)$.

3. Sejam $u = (1, -2, 4)$, $v = (6, 1, -1)$ e $w = (-1, 2, 1)$. Determine $r = (x, y, z)$ tal que r seja ortogonal à w e obedeça a equação $u \times r = v$.

4. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (3, 1, 2)$.

5. Escreva sob a forma $ax + by + cz = d$ a equação do plano que passa pelo ponto $A = (-7, 2, 5)$ e é paralelo aos vetores $u = (3, 2, 4)$ e $v = (1, 0, 4)$.

6. Use o produto vetorial para obter as coordenadas do pé da perpendicular baixada do ponto $P = (1, 2, 3)$ sobre o plano que contém os pontos $A = (5, 6, 0)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (1, 0, 4)$.

7. Sejam $A = (1, -1, 2)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (2, -1, 1)$. Calcule a área do paralelogramo que tem os segmentos AB e AC como lados.

Referências

[1] Elon L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Segunda Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2015.