Lista de Exercícios
Geometria Analítica e Álgebra Linear
MAT 105

Primeiro período de 2018

Está lista de exercícios contém exercícios de [2], [1] e exercícios de outras referências. Além dos exercícios a seguir, sugerimos os demais exercícios de [2].

Observamos que os títulos das seções a seguir correspondem aos títulos das seções em [2] embora os números das seções não correspondam.

1 Coordenadas na reta

1. Sejam a e b, com $a < b$, as coordenadas dos pontos A e B sobre um eixo $\mathcal{E}$, respectivamente. Seja n um inteiro tal que $n \geq 2$. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que dividem o segmento de reta AB em n partes iguais.

   Sugestão: Resolva o problema para algum valor de n específico, por exemplo, $n = 3$, e depois resolva o caso geral.

2. Sejam a, x e b, com $a < x < b$, as coordenadas dos pontos A, X e B sobre um eixo $\mathcal{E}$, respectivamente. Dizemos que o ponto X divide o segmento de reta AB em *média e extrema razão* se X satisfaz

   $$\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = \frac{d(X,B)}{d(A,X)}.$$

   O quociente $d(A,X)/d(A,B)$ é chamado *razão áurea*. Supondo que X divide o segmento de reta AB em média e extrema razão, calcule x em função de a e b.

   Observações: (i) Procuramos x tal que $a < x < b$ (verifique quais raízes satisfazem essa condição). (ii) Por hipótese, temos $a < b$. Isso implica $-b < -a$. (iii) Para simplificar, considere primeiro o caso particular em que $a = 0$ e $b = 1$ (o que acontece com as raízes?).

3. Seja O a origem de um eixo $\mathcal{E}$, e seja A o ponto desse eixo cuja coordenada é igual a 1. Qual é a coordenada do ponto X que divide o segmento de reta OA em média e extrema razão? Calcule a *razão áurea* $d(O,X)/d(O,A)$ (veja o exercício anterior).

4. Quando A é o ponto médio do segmento de reta XX', dizemos que X' é o *simétrico de X em relação ao ponto A*. Os pontos A, X e X' sobre um eixo $\mathcal{E}$ têm coordenadas a, x e x', respectivamente. Suponha que X' é o simétrico de X em relação a A. (a) Calcule x' em função de a e x. (b) Calcule x em função de a e x'.

5. Os pontos A, B e X sobre um eixo $\mathcal{E}$ têm coordenadas a, b e x, respectivamente. Seja X' o simétrico de X em relação a A, e seja X'' o simétrico de X' em relação a B. Quais são as coordenadas de X' e X''?

   Observação: A resposta deve depender dos dados do problema, que são a, b e x.

6. Seja $\mathcal{E}$ um eixo. Fixado um ponto $A \in \mathcal{E}$, definimos a função

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ X &\mapsto X' \end{aligned}$$

   onde a coordenada do ponto X' é dada por $x' = 2a - x$. Essa função é chamada *reflexão em relação ao ponto A*.

   (a) Prove que
   $$d(X',Y') = d(X,Y)$$
   para todo X e Y em $\mathcal{E}$. A função $X \mapsto X'$ é chamada *isometria* pois preserva distâncias.

   (b) Prove que a função $X \mapsto X'$ inverte a orientação, ou seja, se X está à esquerda de Y, então X' está à direita de Y'.

   (c) Prove que a função $X \mapsto X'$ possui apenas um ponto fixo, ou seja, existe apenas um ponto X tal que $X' = X$. Que ponto é esse?

7. Seja $\mathcal{E}$ um eixo. Dado $c \in \mathbb{R}$, definimos a função

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ X &\mapsto X_c \end{aligned}$$

   onde a coordenada do ponto X_c é dada por $x_c = x + c$. Essa função é chamada *translação por c*.

   (a) Prove que
   $$d(X_c,Y_c) = d(X,Y)$$
   para todo X e Y em $\mathcal{E}$. A função $X \mapsto X_c$ é chamada *isometria* pois preserva distâncias.

(b) Prove que a função $X \mapsto X_c$ preserva a orientação, ou seja, se X está à esquerda de Y, então X' está à esquerda de Y'.

(c) Se $c \neq 0$, prove que a função $X \mapsto X_c$ não possui ponto fixo, ou seja, não existe um ponto X tal que $X_c = X$.

2 Coordenadas no plano

1. Diz-se que o ponto A' é o *simétrico do ponto A em relação à reta r* quando r é a mediatriz do segmento AA'. Dado $A = (x, y)$, determine: (a) O simétrico de A em relação ao eixo OX. (b) O simétrico de A em relação ao eixo OY.

   Observação: A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio de AB.

2. O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5\}$ corresponde a uma reta paralela ao eixo OX. Seja r essa reta. Determine o simétrico do ponto $P = (3, -2)$ em relação à reta r.

3. Para cada uma das equações listadas abaixo, descreva o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem a equação.

   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   (b) $y^2 - 6y + 9 = 0$.
   (c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.
   (d) $(x^2 + 1)(x - y) = 0$.

4. Em cada um dos casos listados abaixo, esboce no plano o conjunto dos pontos cujas coordenadas x e y satisfazem as condições especificadas.

   (a) $|x - 3| < 1$.
   (b) $|x - 3| = 1$.
   (c) $|x - 3| \leq 1$ e $|y - 2| \leq 5$.

   Observação: Dado $u \in \mathbb{R}$, lembre que $|u| < 1$ significa $-1 < u < 1$. De forma mais geral, para qualquer valor de c, a desigualdade $|u| < c$ significa $-c < u < c$.

5. Quando B é o ponto médio do segmento de reta YY', dizemos que Y' é o *simétrico de Y em relação ao ponto B*. Qual é o simétrico do ponto $X = (x, y)$ em relação ao ponto $A = (a, b)$? Em particular, qual é o simétrico de X em relação à origem O?

6. Três vértices de um retângulo são $O = (0, 0)$, $A = (a, a)$ e $B = (-b, b)$ com $a > 0$ e $b > 0$. Qual é o quarto vértice?

   Sugestão: Faça uma figura. O que acontece quando você "se desloca" do ponto O para o ponto A?

3 Coordenadas no espaço

1. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

   ( ) Quando se usa o sistema de eixos $OXZY$ em vez de $OXYZ$, os planos horizontais se tornam verticais.

   ( ) Ao mudar do sistema $OXYZ$ para $OXZY$, os planos verticais passam a ser horizontais.

   ( ) Se os pontos $P = (x, y, z)$ pertencem todos a uma reta no espaço então os pontos $P' = (x, y, 0)$ estão sobre uma reta no plano π_{xy}.

4 Segmentos de reta no plano

Observação: Em alguns exercícios a seguir, pode ser útil lembrar que se $A = (a, b)$ e $A' = (-b, a)$, então os segmentos OA e OA' são perpendiculares e congruentes.

1. Em cada um dos casos a seguir, decida se o segmento AA' corta um dos eixos, nenhum deles ou ambos. Determine o(s) ponto(s) de intersecção quando existir(em).

   (a) $A = (-5, 3)$, $A' = (-1, -2)$.

   (b) $A = (2, -1)$, $A' = (7, -15)$.

   (c) $A = (-3, -1)$, $A' = (4, 2)$.

2. Em cada um dos casos listados abaixo, determine (se existir) o ponto de intersecção dos segmentos AA' e BB'. Se os segmentos não se intersectarem, decida se os segmentos pertencem a retas concorrentes, paralelas, ou paralelas e coincidentes.

   (a) $A = (1, 3)$, $A' = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$, $B' = (4, 1)$.

   (b) $A = (0, 0)$, $A' = (1, 1)$, $B = (3, 4)$, $B' = (-1, 5)$.

   (c) $A = (1, 234)$, $A' = (0, 123)$, $B = (315, 18)$, $B' = (317, 240)$.

   (d) $A = (2, 5)$, $A' = (3, 6)$, $B = (18, 21)$, $B' = (40, 43)$.

3. Sejam $A = (2, -5)$ e $B = (5, -2)$. Dê um exemplo de pontos C e D tais que as retas AB e CD sejam perpendiculares.

4. Sejam $A = (2, 5)$, $B = (4, 2)$, $C = (3, 4)$ e $D = (0, y)$. Para qual valor de y as retas AB e CD são perpendiculares?

5. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Sabe-se que $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$ e $C = (6, 4)$. Quais são as coordenadas do vértice D? Seja M o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Quais são as coordenadas de M?

6. Se X_t é o ponto do segmento AB tal que $d(A, X_t)/d(A, B) = t$, quando vale $d(A, X_t)/d(X_t, B)$?

5 Distância entre dois pontos

1. O triângulo ABC com $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$, onde $a > 0$, é equilátero. Quais são os possíveis valores de y?

2. Dados $A = (2, 5)$ e $C = (-8, 2)$. Calcule os cossenos dos ângulos $O\hat{A}C$ e $O\hat{C}A$.

3. Em cada um dos casos listados abaixo, decida se o triângulo ABC tem um ângulo obtuso, um ângulo reto, ou se seus três ângulos são agudos:

   (a) $A = (0, 0)$, $B = (3, 152)$, $C = (-45, 1)$.
   (b) $A = (1, 2)$, $B = (2, -3)$, $C = (4, 8)$.
   (c) $A = (2, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (3, 10)$.

4. Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$ com $a \neq 0$. Determine x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

5. Sejam $A = (1, -3)$ e $B = (3, 1)$. Qual ponto do eixo OX é equidistante dos pontos A e B?

6. Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 1)$. Qual é o ponto C de abscissa 3 tal que AC é perpendicular a AB?

6 Escolhendo o sistema de coordenadas

1. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que

$$d(A, B)^2 + d(B, C)^2 + d(C, D)^2 + d(D, A)^2 = d(A, C)^2 + d(B, D)^2$$

   (a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

2. O triângulo ABC é equilátero e seu lado mede l. Num sistema de coordenadas em que a origem é equidistante de A, B e C e o ponto C está sobre o eixo OY, quais são as coordenadas dos três vértices?

3. Chama-se *baricentro* de um triângulo o ponto de interseção de suas três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos:

   (a) $A = (1, 5)$, $B = (3, 2)$ e $C = (2, 4)$.
   (b) $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$.

   Observação: Uma mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

4. Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas OXY adequado e use-o para provar que as diagonais do paralelogramo cortam-se mutualmente ao meio.

7 Outros tipos de coordenadas

1. Identifique os seguintes subconjuntos do plano por meio de suas coordenadas polares (R, θ).

   (a) $R = 3$.

   (b) $\theta = 3\pi/4$.

   (c) $R \cos\theta = 5$.

2. Esboce a curva descrita pelo ponto de coordenadas polares $R = t$ e $\theta = 2\pi t$ quando t assume todos os valores reais positivos.

3. Esboce o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas polares satisfazem a relação $R = \cos 3\theta$.

8 As equações da reta

1. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, 1)$ e é paralela à reta $y = -2x + 5$?

2. Sejam $A = (1, 2)$ e $B = (-3, -4)$. Qual é o ponto de abcissa 2 sobre a reta que passa pelo ponto $C = (5, 6)$ e é perpendicular a AB?

3. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Determine os vértices desse triângulo.

4. Os pontos $A = (2, 5)$ e $A' = (14, 1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação dessa reta.

5. Determine os pontos que pertencem à reta $y = 2x + 1$ e estão situados à distância 2 da origem.

6. Sob a forma $ax + by = c$, escreva a equação da reta perpendicular à reta $3x + 2y = 5$ que passa pelo ponto $P = (-1, -2)$.

7. Qual é o ponto de ordenada 3 na reta paralela a $3x - 2y = 2$ tirada pelo ponto $A = (5, -1)$?

8. Em que ponto a reta $ax + by = c$ corta o eixo OX? E o eixo OY?

9. Dado que $b \neq 0$, exiba pontos com abcissas 2, 3 e 4 sobre a reta $ax + by = c$.

10. Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $(2, 3)$ e é perpendicular à reta $5x - 3y = 2$.

11. Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$ e $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

12. Escreva uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos $(7, -2)$ e $(3, 4)$.

13. Determine uma representação paramétrica para a reta $5x - 2y = 1$.

14. Considere $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ com $x_1 < x_2 < x_3$. Calcule $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$. Verifique que $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$. Os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares? Justifique sua resposta.

9 Ângulo entre duas retas

1. A reta definida pelas equações paramétricas $x = 2t + 7$ e $y = 3t + 8$ forma um ângulo agudo α com a reta $5x + 11y = 6$. Determine α.

2. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pela origem e faz um ângulo de 45^o com a reta $(1/2)x + (\sqrt{3}/2)y = 1$.

3. Que ângulos faz a reta $3x + 4y = 7$ com os eixos OX e OY?

10 Distância de um ponto a uma reta

1. Qual é a distância da origem à reta $5x - 2y = 8$?

2. Qual é o raio da circunferência que tem centro no ponto $P = (4, 1)$ e é tangente à reta $3x + 7y = 2$?

   Sugestão: (i) Que condição define uma circunferência com centro em P? (ii) Em quantos pontos uma reta e uma circunferência podem se intersectar? E no caso em que a reta é tangente à circunferência?

3. Os vértices do triângulo ABC são $A = (2, 1)$, $B = (1, 4)$ e $C = (5, 5)$. Qual é o comprimento da altura baixada de A sobre a base BC?

4. Determine a distância do ponto $P = (3, 1)$ à reta $x + 2y = 3$. Seja δ essa distância. Determine o ponto $Q = (x, y)$ sobre a reta tal que $d(P, Q) = \delta$.

5. Calcule a distância do ponto $(-2, 3)$ à reta cujas equações paramétricas são $x = 2 - 3t$ e $y = 1 - 4t$ para $t \in \mathbb{R}$.

6. Determine as equações das retas paralelas à reta $3x - 4y = 1$ situadas à distância 5 dessa reta?

11 Área de um triângulo

1. Calcule a área do triângulo cujos vértices são intersecções de duas das retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y = 3$.

2. Calcule a área do pentágono cujos vértices são os pontos $(-2, 3)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 5)$.

12 Equação da circunferência

1. Dados os pontos $A = (2, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (5, 3)$, obtenha as equações das retas mediatrizes dos segmentos AB e BC e determine as coordenadas da interseção dessas retas. A partir daí, ache a equação da circunferência que passa por A, B e C.

   Observação: A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio de AB.

   Sugestão: Use o seguinte teorema: Sejam P, Q e R os três vértices de um triângulo. Temos as seguintes propriedades: (i) As mediatrizes dos três lados se encontram em apenas um ponto. (ii) Existe apenas uma circunferência que passa pelos pontos P, Q e R, e o centro dessa circunferência é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados.

2. Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$ e tem centro sobre o Eixo OY?

3. Escreva a equação da circunferência que tem centro no ponto $P = (2, 5)$ e é tangente à reta $y = 3x + 1$.

4. Fixado a, quais devem ser os dois valores de b para os quais a reta $y = ax + b$, de inclinação a, seja tangente à circunferência de centro O e raio r?

13 Reconhecimento da equação da circunferência

1. Completando os quadrados, decida se cada uma das equações listadas abaixo define uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio:

   (a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$.
   (b) $-x^2 - y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$.
   (c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$.
   (d) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$.

14 Desigualdades lineares

1. Esboce o gráfico do conjunto das soluções de cada uma das desigualdades a seguir:

   (a) $y \leq x^2$.

   (b) $x^2 + y^2 \geq 1$.

   (c) $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

   (d) $|x| + |y| \leq 1$.

2. Um agricultor costuma plantar feijão e arroz. Sua propriedade dispões de 40ha de terra cultivável mas apenas 20ha podem ser usados para plantar arroz. Ele tem condições de pagar 2400 horas de trabalho no verão e 1380 horas no inverno. Suas culturas apresentam as seguintes características:

	lucro por ha.	horas de trabalho por ha. no verão	horas de trabalho por ha. no inverno
feijão	450	30	24
arroz	1200	120	60

   Quantos hectares de feijão e quantos de arroz ele deve plantar de modo a maximizar seu lucro? (A área utilizada para plantar cada um dos cereais é a mesma em ambos os plantios.)

15 Vetores no plano

1. Sejam AA', BB' e CC' segmentos de reta no plano. Suponha que AA' é equipolente a BB' e que BB' é equipolente a CC'. Prove que AA' e CC' são equipolentes.

2. Prove geometricamente que um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se suas diagonais se cortam mutuamente ao meio.

3. Seja $T_v : \Pi \to \Pi$ a translação pelo vetor v no plano Π. Se $T_v(A) = A'$, $T_v(B) = B'$ e $T_v(C) = C'$, prove que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B'\hat{A}'C'$ têm a mesma medida.

16 Operações com vetores

1. Sejam u e v dois vetores quaisquer. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) Uma combinação linear $\alpha u + \beta v$ só pode ser igual a zero quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(b) Se $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$, então $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

(c) Nenhum dos vetores u e v é multiplo do outro.

(d) Para $u = (a, b)$ e $v = (a', b')$, temos $ab' - a'b \neq 0$.

(e) Todo vetor do plano é combinação linear de u e v.

(Neste exercício, devem ser provadas as implicações (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a).)

2. Considere o triangulo ABC com vértices $A = (-8, 6)$, $B = (-8, 9)$ e $C = (-4, 6)$. Seja T_v a translação determinada pelo vetor $v = (9, -4)$. Determine os vértices A', B' e C' do transladado de ABC por v.

3. Considere os vetores $u = (3, -2)$, $v = (0, 1)$ e $w = (-1, 5)$. Calcule $2u - v + 3w$. Calcule a primeira coordenada de $3u - w$.

4. O que você pode afirmar sobre o ângulo entre dois vetores que não são linearmente independentes?

5. Considere o vetor $v = (-2, 3)$. Dê um exemplo de vetor w tal que v e w sejam colineares? Dê um exemplo de w tal que v e w sejam linearmente independentes?

6. Exprima o vetor $w = (1, 1)$ como combinação linear de $u = (-2, 1)$ e $v = (1, -1)$.

7. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

8. Sejam u e v vetores quaisquer. Mostre que os vetores $|u|v$ e $|v|u$ têm o mesmo comprimento.

9. Mostre que se os vetores u e v têm o mesmo comprimento, então $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. E se $u + v$ e $u - v$ são ortogonais, u e v têm o mesmo comprimento?

10. Dado o paralelogramo $ABCD$, se $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, então $\overrightarrow{AD} = u + v$ e $\overrightarrow{BC} = v - u$. Prove que $|u - v|^2 + |u + v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$. Conclua que em todo paralelogramo a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos quatro lados.

11. Prove as seguintes propriedades do comprimento de um vetor:

   (a) $|v| = 0$ se e somente se $v = 0$.

   (b) $|v + w| \leq |v| + |w|$.

   (c) $|tv| = |t||v|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   (d) $|-v| = |v|$.

12. Sejam A, B e C pontos do plano. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (a) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = |\overrightarrow{AB}|^2$.
    (b) As retas AB e BC são perpendiculares.

13. Dados os vetores u e v com $u \neq 0$. Prove que o vetor $w = v - \frac{\langle v,u \rangle}{\langle u,u \rangle} u$ é perpendicular a u.

14. Sejam u e v vetores não-colineares. Se um vetor w é tal que $\langle w, u \rangle = 0$ e $\langle w, v \rangle = 0$, mostre que $w = 0$.

17 Aplicações geométricas

1. Dado um triângulo ABC qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

2. No triângulo ABC, sejam $u = \overline{CA}$, $v = \overline{CB}$ e $w = u - 2v$. Calcule α para que $X = C + \alpha w$ pertença à reta AB.

18 Equação da elipse

1. Seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Prove que a reta cuja equação é $\frac{x_1}{a^2} x + \frac{y_1}{b^2} y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com a elipse. Essa reta é chamada a reta tangente à elipse no ponto P.

2. Quais são as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual à $1/2$?

3. Quais são as coordenadas dos focos da elipse $4x^2 + 8y^2 = 12$?

19 Equação da hipérbole

1. Para todo ponto $P = (m, n)$ da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que a reta $\frac{m}{a^2} x - \frac{n}{b^2} y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com a hipérbole. Essa reta é chamada a reta tangente à hipérbole no ponto P.

2. Quais são as coordenadas dos focos da hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$?

3. Cada uma das equações a seguir representa o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas, ou um par de retas que se cortam na origem. Decida cada situação e determine as retas se for o caso.
    (a) $3x^2 - 5y^2 = 0$.
    (b) $3x^2 = 1$.

(c) $5y^2 = -1$.

(d) $3x^2 + 5y^2 = 0$.

(e) $5y^2 = 0$.

4. O eixo de uma hipérbole mede 6 e seus focos situados no eixo OY são $F' = (0, -4)$ e $F = (0, 4)$. Qual é a equação dessa hipérbole?

20 Equação da parábola

1. Dizemos que uma reta é tangente a uma parábola quando elas têm um único ponto em comum e a reta não é paralela ao eixo OY. Prove que a reta $y = 7x - 3$ é tangente à parábola $y = x^2 + 3x + 1$ no ponto $(2, 11)$.

2. Determine α e β de modo que a reta $y = \alpha x + \beta$ seja tangente à parábola $y = x^2 - 2x + 5$ no ponto $(-1, 8)$.

3. Uma parábola de eixo vertical passa por $A = (-2, 19)$, $B = (3, 4)$ e $C = (5, 26)$.

   (a) Qual é a equação dessa parábola?

   (b) Como ficaria a resposta do item (a) se a ordenada de C fosse -2 em vez de 26?

21 Mudança de coordenadas

1. Uma mudança de eixos no plano manteve a origem fixa, enquanto as coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ passaram a ser (a, b) e (c, d), respectivamente. Quais são as novas coordenadas do ponto $(2, 3)$?

2. Determine a translação de eixos que elimina os termos x e y na equação $9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y = 26$ e permite assim reconhecer a curva que ela representa.

3. Efetue uma rotação de -60^o nos eixos OX e OY e com isso identifique a curva $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy = 144$.

4. Efetue a rotação de eixos dada por $x = as - bt$ e $y = bs + at$ onde $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$. Como fica, nas novas coordenadas s e t, a equação da circunferência $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ (onde m e n são constantes dadas)?

22 Formas quadráticas

1. Para cada uma das formas quadráticas abaixo, execute as seguintes tarefas:

   (a) Escreva sua matriz e sua equação característica.
   (b) Obtenha seus autovalores.
   (c) Descreva suas linhas de nível.
   (d) Calcule autovetores unitários u e v.
   (e) Ache os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$.
   (f) Determine os focos da cônica $A's^2 + C't^2 = 1$ em termos das coordenadas x e y.

   As formas quadráticas são as seguintes:

   (a) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
   (b) $\varphi(x, y) = xy$.
   (c) $\varphi(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.
   (d) $\varphi(x, y) = x^2 + xy - y^2$.
   (e) $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$.
   (f) $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$.

23 A equação geral do segundo grau

1. Para cada uma das equações abaixo, identifique detalhadamente a curva que ela define e a mudança de coordenadas que permitiu essa conclusão.

   (a) $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 120x + 10y - 55 = 0$.
   (b) $17x^2 - 312xy + 108y^2 - 590x - 120y + 688 = 0$.
   (c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 171 = 0$.
   (d) $6x^2 - 5xy + y^2 - 17x + 7y + 8 = 0$.
   (e) $x^2 - xy + y^2 - 7x + 5y + 14 = 0$.
   (f) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 9x - 6y + 6 = 0$.

Referências

[1] Ivan de Camargo e Paulo Boulos, *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, Terceira Edição, Prentice Hall, 2005.

[2] Elon L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Segunda Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2015.