Parametrização de Segmentos e Retas

Dados os pontos $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$, para $0 \leq t \leq 1$, as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$ do segmento AA' tal que

$$\frac{d(A, X_t)}{d(A, A')} = t$$

são

$$x_t = (1 - t)a + ta' \qquad \text{e} \qquad y_t = (1 - t)b + tb'.$$

(Veja a dedução dessas fórmulas na Seção 3 de [1].)

A função

$$\begin{aligned} \text{intervalo } [0, 1] &\longrightarrow \text{segmento } AA' \\ t &\longmapsto X_t = (x_t, y_t) \end{aligned}$$

é chamada *parametrização do segmento* AA'. A variável t é chamada o *parâmetro*.

Se nas expressões para x_t e y_t permitirmos que t assuma todos os valores reais, ou seja, $t \in \mathbb{R}$, obteremos todos os pontos da reta AA', não apenas o segmento AA'. A função

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \text{reta } AA' \\ t &\longmapsto X_t = (x_t, y_t) \end{aligned}$$

é chamada *parametrização da reta* AA'.

Vamos usar parametrizações de segmentos e parametrizações de retas para resolver os seguintes problemas (Exercício 2 da Seção 3 de [1]). No segundo item a seguir, vamos apresentar duas soluções: Uma em que usamos parametrizações, e outra em que não usamos.

Exercício. Em cada um dos casos abaixo, determine (se existir) o ponto de intersecção dos segmentos AA' e BB'. Se os segmentos não se intersectarem, decida se eles pertencem a retas concorrentes, paralelas ou coincidentes.

(a) $A = (1, 3)$, $A' = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$ e $B' = (4, 1)$.

(b) $A = (0, 0)$, $A' = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ e $B' = (-1, 5)$.

Solução do item (a). A parametrização do segmento AA' é dada por $X_s = (x_s, y_s)$ onde

$$x_s = 1 + s, \qquad y_s = 3 - 4s$$

e $0 \leq s \leq 1$. A parametrização do segmento BB' é dada por $X'_t = (x'_t, y'_t)$ onde

$$x'_t = -1 + 5t, \qquad y'_t = 1$$

e $0 \leq t \leq 1$.

Se os segmentos se intersectam, devem existir $s \in [0,1]$ e $t \in [0,1]$ tais que

$$X_s = X'_t,$$

ou seja,

$$(1 + s, 3 - 4s) = (-1 + 5t, 1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 + s &= -1 + 5t \\ 3 - 4s &= 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} s - 5t &= -2 \\ -4s &= -2. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema obtemos

$$s = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{1}{2}.$$

Observamos que esses valores de s e t pertencem ao intervalo $[0,1]$. Portanto os segmentos se intersectam e o ponto de intersecção é

$$P = X_{1/2} \qquad \text{ou} \qquad P = Y'_{1/2},$$

ou seja,

$$P = \left(\frac{3}{2}, 1\right).$$

Primeira solução do item (b). A parametrização do segmento AA' é dada por $X_s = (x_s, y_s)$ onde

$$x_s = s, \qquad y_s = s$$

e $0 \leq s \leq 1$. A parametrização do segmento BB' é dada por $X'_t = (x'_t, y'_t)$ onde

$$x'_t = 3 - 4t, \qquad y'_t = 4 + t$$

e $0 \leq t \leq 1$.

Se os segmentos se intersectam, devem existir $s \in [0,1]$ e $t \in [0,1]$ tais que

$$X_s = X'_t,$$

ou seja,

$$(s,s) = (3-4t, 4+t),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} s &= 3-4t \\ s &= 4+t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} s+4t &= 3 \\ s-t &= 4. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema obtemos

$$s = -\frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{19}{5}.$$

Observamos que esses valores de s e t não pertencem ao intervalo $[0,1]$. Portanto, os segmentos AA' e BB' não se intersectam. Todavia, como existe solução do sistema com valores fora do intervalo $[0,1]$, concluímos que as retas que contém os segmentos AA' e BB' se intersectam. Logo, os segmentos AA' e BB' pertencem a retas concorrentes.

Segunda solução do item (b). Antes de resolver o exercício, faremos algumas observações:

Considere os segmentos AA' e BB'. Sabemos calcular o cosseno do ângulo θ entre AA' e BB'. Observamos que as retas que contém os segmentos AA' e BB' (ou seja, as retas AA' e BB') são concorrentes se e somente se o ângulo θ entre os segmentos AA' e BB' é diferente de 0, π e $-\pi$, ou seja, se e somente se $\cos\theta \neq 1$ e $\cos\theta \neq -1$, ou seja, se e somente se $|\cos\theta| \neq 1$. Portanto, se $|\cos\theta| \neq 1$, as retas que contém AA' e BB' são concorrentes, e se $|\cos\theta| = 1$, as retas que contém AA' e BB' são paralelas ou coincidentes.

Se $|\cos\theta| = 1$, então as retas AA' e BB' são paralelas se quaisquer três pontos entre A, A', B e B' não são colineares, e as retas AA' e BB' são coincidentes se quaisquer três pontos entre A, A', B e B' são colineares.

Considere três pontos quaisquer entre A, A', B e B', por exemplo, A, A' e B. Seja X_t com $t \in \mathbb{R}$ a parametrização da reta AA'. Para verificar se A, A' e B são colineares, basta verificar se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t = B$. Se existir tal valor de t, os pontos A, A' e B são colineares. Caso não exista tal valor de t, os pontos A, A' e B não são colineares.

Finalmente, vamos resolver o item (b) usando as observações acima.

Repetindo a primeira parte da primeira solução do item (b), concluímos que os segmentos AA' e BB' não se intersectam.

Agora, calculamos o cosseno do ângulo θ entre AA' e BB'. Obtemos

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{(a'-a)(c'-c)+(b'-b)(d'-d)}{\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}\sqrt{(c'-c)^2+(d'-d)^2}}\\ &= \frac{(1-0)(-1-3)+(1-0)(5-4)}{\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}\sqrt{(-1-3)^2+(5-4)^2}}\\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{17}}.\end{aligned}$$

Observamos que $|\cos\theta| \neq 1$. Portanto as retas que contém os segmentos AA' e BB' são concorrentes.

(Se tivéssemos obtido $|\cos\theta| = 1$, as retas não seriam concorrentes, e teríamos que decidir se elas são coincidentes ou paralelas, verificando se três pontos quaisquer dos segmentos são colineares ou não.)

Referências

[1] Elon L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Segunda Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2015.