Prova 3 – MAT 105 – GAAL – Turma N – 16 de maio de 2018

Solução

Questão 1 (9 pontos). Considere os vetores $v = (1, 2)$ e $w = (4, 2)$. (a) Calcule as coordenadas de $u = 3v - 2w$. (b) Exprima o vetor $z = (-1, 3)$ como combinação linear de v e w.

Solução: (a) Calculamos $u = 3v - 2w = 3(1, 2) - 2(4, 2) = (3, 6) + (-8, -4) = (-5, 2)$.
(b) Procuramos x e y tais que $xv + yw = z$, ou seja, $x(1, 2) + y(4, 2) = (-1, 3)$, ou seja,

$$\begin{aligned} x + 4y &= -1 \\ 2x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $x = 7/3$ e $y = -5/6$. Portanto $z = (7/3)v - (5/6)w$.

Questão 2 (9 pontos). Considere os vetores $u = (1, -3)$ e $v = (2, 1)$. (a) Se $w = u + \lambda v$, determine λ para que u e w sejam ortogonais. (b) Determine o cosseno do ângulo que u forma com v.

Solução: (a) Observamos que u e w são ortogonais se e somente se $\langle u, w\rangle = 0$. Calculamos $\langle u, w\rangle = \langle u, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle = 10 + \lambda(-1)$. Portanto u e v são ortogonais se e somente se $10 - \lambda = 0$, ou seja, $\lambda = 10$.
(b) Observamos que $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre u e v. Calculamos $|u| = \sqrt{10}$ e $|v| = \sqrt{5}$ e $\langle u, v\rangle = -1$. Logo $\cos\theta = \langle u, v\rangle/(|u||v|) = -1/\sqrt{50} = -\sqrt{50}/50$.

Questão 3 (8 pontos). Sejam $\overrightarrow{OA} = (1, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 1)$ e $\overrightarrow{OC} = (-2, 3)$. (a) Calcule o comprimento de cada lado do triângulo ABC. (b) O triângulo ABC é acutângulo (isto é, todo os ângulos internos são agudos)?

Solução: (a) Podemos calcular a distância entre os pontos A, B e C observando que as coordenadas desses pontos são iguais às coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, respectivamente. Alternativamente, calculamos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(1, -1) + (2, 1) = (1, 2)$, e analogamente obtemos $\overrightarrow{BC} = (-4, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-3, 4)$. Logo, o comprimento dos lados dos triângulo são dados por $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}$ e $|\overrightarrow{AC}| = 5$.
(b) Calculamos $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = 5$. Como esse número é positivo, o ângulo $B\hat{A}C$ é agudo. Analogamente, $\langle\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$ e $\langle\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\rangle = 20 > 0$ implicam que $A\hat{B}C$ é reto e $B\hat{C}A$ é agudo. Logo o triângulo é reto e portanto não é acutângulo. Alternativamente, pode-se verificar que os comprimentos dos lados do triângulo satisfazem o Teorema de Pitágoras e portanto o triângulo é retângulo.

Questão 4 (8 pontos). Dados os vetores u e v com $u \neq 0$, o vetor z tal que z é um múltiplo de u e $v - z$ é ortogonal a u é chamado projeção ortogonal de v sobre u. Sejam $u = (3, 0)$ e $v = (2, 1)$. (a) calcule a projeção ortogonal de v sobre u. (b) Exprima o vetor v como a soma de dois vetores a e b tais que a seja um múltiplo de u e b seja ortogonal a u.

Solução: (a) A projeção z de v sobre u é dada por

$$z = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{6}{9}(3, 0) = (2, 0).$$

(b) Pela definicão de projeção, o vetor $v - z$ é ortogonal a u, logo

$$v = z + v - z = (2, 0) + (0, 1)$$

onde $(2, 0)$ e $(0, 1)$ são ortogonais, como desejado.