Prova 4 – MAT 105 – GAAL – Turma N – 6 de junho de 2018

Solução

Questão 1 (8 pontos). Considere a curva definida por $x^2 + 4y^2 = 32$. Que curva é essa? Faça um esboço do gráfico dessa curva e indique em que pontos a curva corta os eixos do sistema de coordenadas. Quais são as equações das retas tangentes a essa curva que têm inclinação igual a 1?

Solução. A equação dada é equivalente a

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Essa equação define uma elipse no plano XY (faça um esboço). Essa elipse corta o eixo OX nos pontos $(\pm 4\sqrt{2}, 0)$ e o eixo OY nos pontos $(0, \pm 2\sqrt{2})$.

A equação das retas com inclinação igual a 1 têm a forma $y = x + b$. Uma reta dessa forma é tangente à elipse se e somente se o sistema de equações

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 32 \\ y &= x + b \end{aligned}$$

tem apenas uma solução. Resolvendo esse sistema para x, obtemos a equação

$$5x^2 + 8bx + 4b^2 - 32 = 0.$$

Essa equação tem apenas uma solução se e somente se seu discriminante é igual a zero, ou seja,

$$\Delta = -16b^2 + 640 = 0.$$

Isso implica em $b = \pm 2\sqrt{10}$. Portanto as equações procuradas, das retas tangentes, são

$$y = x + 2\sqrt{10} \qquad \text{e} \qquad y = x - 2\sqrt{10}.$$

Questão 2 (8 pontos). Determine a translação de eixos que elimina os termos x e y na equação

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 8 = 0$$

e escreva essa equação usando as novas coordenadas. Fazendo isso, diga qual curva essa equação representa e esboce o gráfico da curva (desenhando também os eixos dos sistemas de coordenadas).

Solução. Considere um sistema de coordenadas $O'ST$ transladado em relação ao sistema OXY. Então as coordenadas (x, y) e (s, t) de um ponto P estão relacionadas pela seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= s + a, \\ y &= t + b, \end{aligned}$$

onde (a, b) são as coordenadas de O' com respeito ao sistema OXY. Vamos escolher a e b convenientemente. Substituindo as fórmulas de mudança de coordenadas na equação dada e expandindo os termos, obtemos

$$4s^2 - 3t^2 + s(8a + 8) + t(-6b + 12) + 4a^2 - 3b^2 + 8a + 12b - 8 = 0.$$

Tomando a e b de modo que $8a + 8 = 0$ e $-6b + 12 = 0$, ou seja, $a = -1$ e $b = 2$, obtemos

$$4s^2 - 3t^2 = 0.$$

Portanto a translação de eixos procurada é

$$\begin{aligned} x &= s - 1, \\ y &= t + 2. \end{aligned}$$

Observamos que a equação $4s^2 - 3t^2 = 0$ é equivalente a par de equações

$$t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} s.$$

Essas equações define um par de retas concorrentes na origem $O' = (-1, 2)$ do sistema $O'ST$ (faça um esboço do gráfico).