Prova 5 – MAT 105 – GAAL – Turma N – 25 de junho de 2018

Solução

Questão 1 (7 pontos). Considere a forma quadrática $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = x^2 + 24xy - 6y^2$. (a) Escreva a matriz e a equação característica de φ. (b) Determine os autovalores associados a φ (ou à matriz de φ). (c) Determine um autovetor unitário associado a cada autovalor. (d) Escreva a equação $\varphi(x, y) = 15$ no sistema de coordenadas associado aos autovetores e identifique essa linha de nível.

Solução. A matriz de φ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de φ é $\lambda^2 + 5\lambda - 150 = 0$. Logo os autovalores são $\lambda_1 = -15$ e $\lambda_2 = 10$. Os autovetores unitários correspondentes são

$$u = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \qquad u^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Consequentemente, se efetuarmos a mudança de variáveis

$$x = \frac{3}{5}s + \frac{4}{5}t,$$
$$y = -\frac{4}{5}s + \frac{3}{5}t,$$

a forma quadrática assume a forma

$$\overline{\varphi}(s, t) = -15s^2 + 10t^2 = \frac{s^2}{-1/15} + \frac{t^2}{1/10}.$$

Nas coordenadas s e t, as linhas de nível $\varphi(x, y) = 15$, ou seja $\overline{\varphi}(s, t) = 15$, ou seja, $-s^2 + t^2/(3/2) = 1$ são hipérboles com os focos no eixo OT.

Questão 2 (5 pontos). Dados $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$, $u' = (5, 6)$ e $v' = (7, 8)$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = u'$ e $Tv = v'$.

Solução. Seja $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Procuramos constantes a, b, c e d tais que $T(1, 2) = (5, 6)$ e $T(3, 4) = (7, 8)$, ou seja, $(a + 2b, c + 2d) = (5, 6)$ e $(3a + 4b, 3c + 4d) = (7, 8)$, ou seja, $a + 2b = 5$, $c + 2d = 6$ e $3a + 4b = 7$, $3c + 4d = 8$. Obtemos portanto um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, a, b, c e d. De fato, obtemos dois sistemas de duas equações e duas incógnitas, desacoplados:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 \qquad & c + 2d &= 6 \\ 3a + 4b &= 7 \qquad & 3c + 4d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = 5$. Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -4x + 5y).$$

Questão 3 (5 pontos). Obtenha uma equação para o plano que contém $P = (1, 1, -2)$ e é perpendicular ao segmento de reta AB onde $A = (3, 5, 2)$ e $B = (7, 1, 12)$.

Solução. Observamos que o plano é perpendicular à reta AB se e somente se o plano é perpendicular à reta OB' com $B' = (4, -4, 10)$. Logo uma equação para o plano é $4x - 4y + 10z = d$ para alguma constante d. Como P pertence ao plano, devemos ter $4(1) - 4(1) + 10(-2) = d$, ou seja, $d = -20$. Portanto uma equação do plano é $4x - 4y + 10z = -20$.