Prova 6 – MAT 105 – GAAL – Turma N – 9 de julho de 2018

Solução

Questão 1 (7 pontos). Ache uma equação para o plano que contém o ponto $P = (1, 1, -1)$ e é perpendicular à reta AB onde $A = (5, 3, 2)$ e $B = (1, 7, 12)$.

Solução. Observamos que o plano é perpendicular à reta AB se e somente se o plano é perpendicular à reta OB' com $B' = (1 - 5, 7 - 3, 12 - 2) = (-4, 4, 10)$. Logo, uma equação para o plano é $-4x + 4y + 10z = d$ para alguma constante d. Como P pertence ao plano, devemos ter $-4(1)+4(1)+10(-1) = d$, ou seja, $d = -10$. Portanto uma equação para plano é $-4x+4y+10z = -10$.

Questão 2 (7 pontos). Sejam $x = 1+t$, $y = 1+2t$, $z = 2-3t$ para $t \in \mathbb{R}$ as equações paramétricas da reta r. Obtenha uma equação para o plano que contém a reta r e o ponto $C = (-1, 2, 1)$.

Solução. Tomamos o ponto $A = (1, 1, 2)$ na reta r e observamos que a reta r é paralela ao vetor $v = (1, 2, -3)$. Calculamos $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1)$. Então o vetor $w = v \times \overrightarrow{AC}$ é perpendicular ao plano procurado. Calculamos $w = (1, 7, 5)$. Logo uma equação para o plano é $x + 7y + 5z = d$ para alguma constante d. Como A pertence ao plano, devemos ter $1(1) + 7(1) + 5(2) = d$, ou seja, $d = 18$. Portanto uma equação para o plano é $x + 7y + 5z = 18$.

Questão 3 (7 pontos). Analise o seguinte sistema de equações e diga se ele é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 9 \\ 9x - 6y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

Solução. Consideramos os vetores-linha da matriz do sistema: $l_1 = (6, -4, 2)$ e $l_2 = (9, -6, 3)$. Resolvendo a equação $l_1 = kl_2$ para k, concluímos que existe k tal que $l_1 = kl_2$. De fato, $l_1 = (2/3)l_2$. Portanto l_1 e l_2 são colineares. Logo os planos definidos pelas equações do sistema são parelelos ou coincidentes. Consideramos agora os vetores-linha da matriz aumentada do sistema: $L_1 = (4, -4, 2, 9)$ e $L_2 = (9, -6, 3, 12)$. Observamos que a razão entre as últimas coordenadas dos vetores é $9/12 = 3/4$. Logo não existe k tal que $L_1 = kL_2$, ou seja, L_1 e L_2 não são colineares. Portanto os planos são paralelos. Logo o sistema é impossível.

Questão 4 (7 pontos). Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Os vetores-linha da matriz desse sistema são linearmente independentes?

Solução. matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, obtemos

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -2 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + (-7/3)L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 14/3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema correspondente de baixo para cima, obtemos $z = -3/7$, $y = 5/7$ e $x = 6/7$. Portanto $(x, y, z) = (6/7, 5/7, -3/7)$ é a única solução desse sistema. Logo o sistema é determinado e consequentemente os vetores-linha da matriz do sistema são linearmente independentes. De fato, um sistema é determinado se e somente se os vetores-linha da matriz do sistema são linearmente independentes, o que ocorre se e somente se os vetores-coluna da matriz do sistema são linearmente independentes, o que ocorre se e somente se o determinante da matriz do sistema é diferente de zero.

Questão 5 (6 pontos). Sejam

$$m = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcule: (a) $\det m$. (b) $\det p$. (c) qp.

Solução. (a) Calculando o determinante obtemos $\det m = 27$. (b) Observamos que $\det p = 0$ pois dois vetores-coluna de p são colineares (de fato iguais). (c) Observamos que qp é uma matrix 2×3. Calculando, obtemos

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 & 39 \\ 13 & 13 & 53 \end{bmatrix}.$$