# A Equação de Newton

Em mecânica clássica, uma partícula é descrita por um ponto no espaço cujas coordenadas são dadas por uma função

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto x(t). \end{aligned}$$

Essa função é chamada a **trajetória** da partícula. A variável $t$ representa o **tempo** e $x(t)$ representa a **posição** da partícula no instante $t$.

A **velocidade** da partícula, denotada por $v$, é definida como a derivada da trajetória em relação ao tempo:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}.}$$

Portanto

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto v(t). \end{aligned}$$

Interpretamos $v(t)$ como um vetor com ponto inicial em $x(t)$. O vetor $v(t)$ é tangente à trajetória da partícula no ponto $x(t)$.

A **aceleração** da partícula, denotada por $a$, é definida como a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.}$$

Portanto

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto a(t). \end{aligned}$$

Interpretamos $a(t)$ como um vetor com ponto inicial em $x(t)$. O vetor $a(t)$, em geral, não é tangente à trajetória da partícula.

As noções de trajetória, de velocidade e de aceleração permitem descrever o movimento de uma partícula que ocorre em dadas circunstâncias físicas. Contudo, para determinar o movimento precisamos de noções adicionais.

Precisamos das noções de momento e de força, que descrevemos a seguir. Determinar o movimento de uma partícula constitui o problema fundamental da dinâmica.

O **momento** de uma partícula de massa $m$ e velocidade $v$, denotado por $p$, é definido como o produto da massa pela velocidade:

$$\boxed{p = mv = m\frac{dx}{dt}.}$$

Portanto

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto p(t). \end{aligned}$$

Um **campo de forças**, denotado por $F$, é definido por uma função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, v, t) &\mapsto F(x, v, t). \end{aligned}$$

Interpretamos $F(x, v, t)$ como um vetor com ponto inicial em $x$. O vetor $F(x, v, t)$ representa a força que atua sobre a partícula no ponto $x$ com velocidade $v$ no instante $t$.

A **Segunda Lei de Newton** diz que "a taxa de variação do momento de uma partícula é igual à força que atua sobre a partícula":

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = F(x, v, t).} \tag{1}$$

Ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right). \tag{2}$$

Tal relação entre a função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e suas derivadas é chamada uma **equação diferencial**. A equação (1) (ou (2)) é chamada a **Equação de Newton**. Dizemos que a equação (2) é uma equação de segunda ordem pois a derivada de $x$ de maior ordem que ocorre na equação tem ordem 2. Mais precisamente, a Equação de Newton é um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem, pois a equação é vetorial.

No caso em que a massa $m$ da partícula não varia com o tempo, a Equação de Newton se reduz a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right). \tag{3}$$

Ou seja, o produto da massa pela aceleração é igual à força:

$$ma = F(x, v, t). \tag{4}$$

Geralmente, vamos considerar o caso em que a massa $m$ da partícula não varia com o tempo. Sendo assim, vamos supor que $m$ é constante, a não ser que o contrário seja dito.

Se uma partícula se move sob a ação de um campo de forças $F$, entre todas as possíveis trajetórias para a partícula, a partícula irá descrever a trajetória que é solução da Equação de Newton.

Frequentemente, vamos usar "um ponto" em vez de $d/dt$ para denotar a derivada em relação a $t$ e "dois pontos" para denotar a segunda derivada. Portanto

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \text{etc.}$$

Uma **solução** da equação (3) é uma função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. A variável $x$ é chamada a **variável dependente** pois $x$ depende de $t$, e a variável $t$ é chamada a **variável independente**.

É possível associar à Equação de Newton uma equação equivalente com um número maior de variáveis dependentes. Fazemos isso adicionando $v$ ao conjunto de variáveis dependentes e considerando o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(x, v, t). \end{aligned} \tag{5}$$

Esse é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis $x$ e $v$. É evidente que esse sistema é equivalente à Equação de Newton. Sob certos aspectos, sistemas de primeira ordem são mais simples de investigar do que sistemas de segunda ordem. Por isso é útil considerar o sistema (5) em vez do sistema (3).

Especificar um sistema mecânico composto por uma partícula consiste em especificar um campo de forças $F$. Dado um campo de forças $F$, desejamos obter soluções da Equação de Newton, ou pelo menos obter informações sobre as soluções, mesmo que as soluções não sejam conhecidas explicitamente.

Para determinar a trajetória da partícula é necessário impor condições adicionais sobre a solução $x(t)$. Por exemplo, se sabemos que no instante $t_0$ a partícula se situa em $x_0$ com velocidade $v_0$, devemos impor que

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Essas condições são chamadas **condições iniciais**. A experiência sugere que o movimento fica completamente determinado sob essas condições. Uma equação diferencial e condições iniciais constituem um **problema de valor inicial**.

Definimos o **estado** de um sistema como sendo o conjunto de variáveis que especificam a condição do sistema em um instante do tempo. No presente caso, o estado do sistema é o par

$$(x, v) = (\text{posição, velocidade}).$$

Para cada valor de $t$, um problema de valor inicial define uma única função

$$(x_0, v_0) \longmapsto (x(t), v(t)).$$

Ou seja, uma função que associa o estado $(x(t), v(t))$ ao estado inicial $(x_0, v_0)$.

> Em resumo, a Equação de Newton especifica a evolução temporal de um sistema mecânico a partir de um estado inicial.

## Exercícios

1. A Equação de Newton (1) por si só é uma equação diferencial?
2. O que significa dizer que o sistema de equações (5) é de primeira ordem?
3. Escreva o sistema de equações (3) como um sistema de equações de primeira ordem nas variáveis $x$ e $p$.
4. Que outro par de variáveis poderia ser usado para representar o estado do sistema?