As Equações de Hamilton

As equações de Hamilton formam um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem chamado sistema hamiltoniano. Descrevemos a seguir esse sistema.

Em um sistema hamiltoniano, o **estado** do sistema é representado por um ponto (x, p) no espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, chamado **espaço de fases**. O ponto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é chamado a **posição** do sistema e o ponto $p = (p_1, \ldots, p_n)$ é chamado o **momento**. Frequentemente, usamos a notação $z = (x, p)$. O inteiro positivo n é chamado o número de **graus de liberdade** do sistema.

Uma função real $H(x, p)$ definida no espaço de fases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é chamada uma **hamiltoniana**. Por simplicidade, vamos supor que H é uma função de classe C^2.

As equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \qquad \text{e} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p)$$

são chamadas **equações de Hamilton** associadas à H. O sistema de $2n$ equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, p) \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}(x, p) \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n$ é chamado **sistema hamiltoniano** associado à H. A variável $t \in \mathbb{R}$ representa o **tempo**. Frequentemente, vamos usar "um ponto" em vez de d/dt para denotar a derivada em relação a t e "dois pontos" para denotar a segunda derivada. Escrevemos também H_x e H_p para denotar as derivadas parciais de H com respeito a x e a p, respectivamente. Logo, podemos reescrever as equações de Hamilton como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p(x, p) \\ -H_x(x, p) \end{bmatrix},$$

ou ainda

$$\dot{z} = F_H(z),$$

com $F_H(z) = (H_p(z), -H_x(z))$.

Para $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, um sistema hamiltoniano e a condição inicial

$$(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial. O ponto (x_0, p_0) é chamado **estado inicial**. A imagem de uma solução das equações de Hamilton é chamada uma **órbita**.

Vamos supor que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e cada (x_0, p_0) pertencente a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o sistema hamiltoniano possui uma única solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ definida no intervalo $(t_0 - T, t_0 + T)$ com $T > 0$ tal que $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$. Ou seja, vamos supor existência local e unicidade de soluções para o problema de valor inicial.

Uma classe importante de sistemas hamiltonianos é obtida quando a hamiltoniana tem a forma

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + U(x),$$

onde m é uma constante positiva e $U(x)$ é uma função real (de classe C^2) chamada **potencial**. Tais sistemas são chamados **sistemas conservativos**. Para essa classe de sistemas, as equações de Hamilton assumem a forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} p \qquad \text{e} \qquad \frac{dp}{dt} = -(\operatorname{grad} U)(x).$$

Quando $n = 3$ e m representa a massa de uma partícula, essas equações são respectivamente a definição de momento e a Segunda Lei de Newton para o movimento de uma partícula sob a ação do campo de forças $-(\operatorname{grad} U)(x)$.

No texto *Um Resultado Simples de Existência e Unicidade*, vamos provar que a hipótese de existência e unicidade de soluções é realmente verdadeira (com $T = \infty$) para uma classe de sistemas conservativos.

Exemplo 1 (Partícule livre)**.** Considere $n = 3$ e $H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2$. Nesse caso $U(x) = 0$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m} p \\ \frac{dp}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2 (Queda livre)**.** Considere $n = 3$ e $H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + mgx_3$, onde g é uma constante positiva. Nesse caso o potencial é dado por $U(x) = mgx_3$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m} p \\ \frac{dp}{dt} &= (0, 0, -mg). \end{aligned}$$

Aqui, usamos as notações $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Exemplo 3 (Oscilador harmônico em uma dimensão)**.** Considere $n = 1$ e $H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$, onde k é uma constante positiva. Nesse caso o potencial é dado por $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m}p \\ \frac{dp}{dt} &= -kx. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (Pêndulo)**.** Considere $n = 1$ e $H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + m\omega^2(1 - \cos(x))$, onde ω é uma constante positiva. A constante m representa o momento de inércia I, a variável x representa um ângulo θ, e a variável p representa o momento angular L. O potencial é dado por $U(x) = m\omega^2(1 - \cos(x))$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m}p \\ \frac{dp}{dt} &= -m\omega^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Exercício 1 (Sistema magnético em duas dimensões)**.** Considere $n = 2$ e $H(x,p) = |p - A(x)|^2$, onde $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação de classe C^2. Escreva as equações de Hamilton associadas à H. Em particular, escreva as equações no caso em que $A(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.