Um Resultado Simples de Existência e Unicidade

Apresentamos a seguir um resultado simples de existência e unicidade de soluções para uma classe de sistemas hamiltonianos que é suficiente para muitas aplicações em Física.

Consideramos hamiltonianas da forma

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + U(x),$$

onde m é uma constante positiva e $U(x)$ é uma função real (de classe C^2) chamada potencial. O sistema hamiltoniano associado à H é

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{1}{m}p_j \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n$. Esse sistema de equações diferenciais e a condição inicial

$$(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial.

Podemos reescrever o problema de valor inicial acima na forma

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= F(z) \\ z(t_0) &= z_0, \end{aligned}$$

onde $z = (x, p)$ e

$$\begin{aligned} F(z) &= (m^{-1}p, -(\operatorname{grad} U)(x)) \\ &= \left(\frac{1}{m}z_{n+1}, \ldots, \frac{1}{m}z_{2n}, -\frac{\partial U}{\partial z_1}(z_1, \ldots, z_n), \ldots, -\frac{\partial U}{\partial z_n}(z_1, \ldots, z_n)\right). \end{aligned}$$

Observamos que a aplicação $F(z)$ é de classe C^2 (ou seja, todas as funções coordenada de $F(z)$ são de classe C^2).

Vamos aplicar o teorema básico de existência local e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem:

Teorema 1 (Existência local e unicidade)**.** *Seja* $(t,y) \mapsto f(t,y) \in \mathbb{R}^k$ *uma aplicação contínua definida em um conjunto compacto* $R \subset \mathbb{R}^{1+k}$*. Suponha que as derivadas* $\partial f/\partial y_1, \dots, \partial f/\partial y_k$ *existam e sejam contínuas em* R*. Para* $(t_0, y_0) \in R$*, o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$
$$y(t_0) = y_0$$

possui uma única solução $\phi(t)$ *definida no intervalo* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *para uma constante* $h > 0$*.*

O sistema hamiltoniano mencionado anteriormente satisfaz as hipóteses do Teorema 1. Portanto, ele possui uma única solução $t \mapsto z(t) = (x(t), p(t))$ definida em um intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$. Vamos provar que essa solução pode ser estendida para o intervalo $(-\infty, \infty)$. Para fazer isso, vamos usar o seguinte resultado da teoria de continuação de soluções para equações diferenciais:

Teorema 2 (Continuação de soluções)**.** *Considere as hipóteses e a notação do Teorema 1. Se* $(t,y) \mapsto f(t,y)$ *está definida e é contínua em* $\mathbb{R}^{1+k}$ *e se* $\partial f/\partial y_1, \dots, \partial f/\partial y_k$ *existem e são contínuas em* $\mathbb{R}^{1+k}$*, então o intervalo de definição da solução* $\phi(t)$ *pode ser estendido indefinidamente em ambas as direções, desde que* $\|\phi(t)\|$ *permaneça finita. A solução assim obtida é única.*

Grosso modo, a ideia por trás do Teorema 2 é que a solução $\phi(t)$ não pode ser estendida somente se ela diverge ou se $(t, \phi(t))$ converge para a fronteira do domínio de f. Portanto, se a solução permanece finita e se o domínio de f não possui fronteira, a solução pode ser estendida.

Usando a propriedade de conservação da energia e o Teorema 2, vamos provar o seguinte teorema:

Teorema 3 (Existência global e unicidade)**.** *Considere uma hamiltoniana da forma*

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + U(x).$$

Se $U \geq C$ *para uma constante* C*, então o problema de valor inicial para o sistema hamiltoniano correspondente possui uma única solução definida para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, o problema de valor inicial para o sistema hamiltoniano possui uma única solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ definida no intervalo $[-T_0, T_0]$ centrado em t_0 com $T_0 > 0$.

Pelo Teorema 2, para que a solução possa ser estendida para $(-\infty, \infty)$, é suficiente provar que se a solução existe em um intervalo $[-T, T]$, então ela permanece finita nesse intervalo.

Seja $E = H(x(t), p(t))$ a energia do sistema ao longo da solução. Como $H \geq U$, temos $E \geq U(x(t))$. Observamos que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(t_0)\| + \|x(t) - x(t_0)\| \\ &\leq \|x(t_0)\| + \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d}{ds} x(s) \right\| ds \right|. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} p$ e

$$\|p(t)\| = \sqrt{2m(E - U(x(t)))} \leq \sqrt{2mE}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(t_0)\| + \left| \int_{t_0}^{t} |p(s)|\, ds \right| \\ &\leq \|x(t_0)\| + \sqrt{2mE}|t - t_0| \\ &\leq \|x(t_0)\| + \sqrt{2mE}T. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|x(t)\| + \|p(t)\| \leq \|x(t_0)\| + (1 + T)\sqrt{2mE}.$$

Ou seja, a solução $(x(t), p(t))$ permanece limitada para todo $t \in [-T, T]$. Como mencionamos acima, isso demonstra o teorema. □

Exemplo 1 (Partícule livre)**.** Considere $n = 3$ e $H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2$. Nesse caso $U(x) = 0$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m} p \\ \frac{dp}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Observamos que $U = 0$. Portanto, pelo Teorema 3, o problema de valor inicial associado possui uma única solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2 (Oscilador harmônico em uma dimensão)**.** Considere $n = 1$ e $H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2$, onde k é uma constante positiva. Nesse caso, $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m} p \\ \frac{dp}{dt} &= -kx. \end{aligned}$$

Observamos que $U \geq 0$. Portanto, pelo Teorema 3, o problema de valor inicial associado possui uma única solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3 (Pêndulo)**.** Considere $n = 1$ e $H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + m\omega^2(1-\cos(x))$, onde ω é uma constante positiva. A constante m representa o momento de inércia I, a variável x representa um ângulo θ, e a variável p representa o momento angular L. O potencial é dado por $U(x) = m\omega^2(1 - \cos(x))$ e as equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{m}p \\ \frac{dp}{dt} &= -m\omega^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Observamos que $U \geq 0$. Portanto, pelo Teorema 3, o problema de valor inicial associado possui uma única solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$.